

Kleine Einführung in die Astronavigation und Astronomie

Bernd Inhester
binhest@mps.mpg.de

Version 0.8 vom 13. Mai 2007

1 Einleitung

Diese Einführung entstand während ich begann, mich selbst in das Thema astronomische Navigation einzuarbeiten. Für meinen Geschmack fand ich viele der dazu vorhandenen Texte, die sich an Segler wenden, unbefriedigend und oberflächlich, so dass bald aus den zunächst nur stichpunktartig angefertigten handschriftlichen Notizen und kleinen Rechnungen der Grundstock zu dieser Einführung entstand.

Die einzelnen Schritte zur Berechnung des Standortes lassen sich ein wenig Hintergrundwissen zur Astronomie besser verstehen und letztendlich auch praktizieren. Daher ergab sich schon bald die Notwendigkeit, das zunächst als “Formelsammlung” angedachte Skript zu erweitern. Somit beschränken wir uns nicht auf rezeptartige Anleitungen für Berechnungen zur Astronavigation, sondern wollen zumindest ein wenig über diesen engen Tellerrand hinausblicken. Ich bin überzeugt, dass dieses Wissen sich auch für die Astronavigation auszahlt, indem es dem “Navigator” mehr Sicherheit bei der Berechnung des Standortes verleiht, ihm mehr Überblick über mögliche Verfahren vermittelt und ihn auch in die Lage versetzt, der Situation angepasst, Verfahren abzuändern. Bei der Navigation gilt in jeder Hinsicht, dass oft viele Wege zum Ziel führen und die üblichen sind nicht immer die besten.

Um diese “Virtuosität” bei der Standortberechnung zu erlangen, ist es unerlässlich, auch die mathematischen Zusammenhänge zu verstehen. Dieses wird für viele Leser die größte Hürde darstellen. Ich habe den Versuch unternommen, alle Schritte, zumindest soweit sie die Navigation betreffen, en détail vorzurechnen. Diese Zwischenrechnungen machen den Text nicht gerade lesbarer, aber sie bieten demjenigen eine Chance, der Formeln nicht einfach hinnimmt, sondern das Bedürfnis verspürt, sie nachzuvollziehen. Der Text folgt demnach der besten Tradition der Seemannschaft: mehr tun (bzw. wissen) und besser vorbereitet sein als es unter normalen Umständen zu erwarten nötig wäre.

Um die Schritte nachvollziehen zu können, bedarf es allerdings einiger minimaler Grundkenntnisse in Trigonometrie etwa vom Umfang der Schulmathematik. Um diese etwas aufzufrischen, sind im Anhang die wichtigsten Regeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie zusammengefasst. Sie bieten hoffentlich auch demjenigen einen Einstieg, der einen braucht. Zum Ausgleich für die vielen Gleichungen habe ich versucht, das Thema durch möglichst viele Abbildungen zu illustrieren. Die Voraussetzungen an den Leser betreffen somit weniger seinen Kenntnisstand, mit dem er die Lektüre beginnt, als die Bereitschaft und das Interesse, sich in die Thematik einzuarbeiten.

Wer trotz intensiven Nachrechnens die angegebene Formel nicht nachvollziehen kann, sollte nicht verzweifeln. In der Vorabversion diese Textes hatten sich eine Reihe von Fehlern eingeschlichen und es möglich, dass Sie gerade den nächsten entdeckt haben. In diesem Falle bin ich dankbar für einen Hinweis binhest@mps.mpg.de. Wem trotz allem die Gleichungen rätselhaft bleiben, der lese um sie herum. Vielleicht bieten ja Text und Abbildungen allein einige neue, wenn auch beschränkte Einsichten.

Zum warm werden gibts zunächst einige Navigationsübungen auf der Erdkugel in Kapitel 2. Die wichtigsten astronomische Grundlagen werden in den anschließenden beiden Kapiteln besprochen, danach folgt ein wenig über die Messung der Höhe eines Gestirns und die Reduktion des abgelesenen Messwertes.

Zum Schluss werden dann Verfahren für die Ermittlung von Standlinie und -ort aus bekannter Gestirnsposition und erfolgter Höhenmessung erläutert. Wie gesagt, im Anhang befinden sich einige allgemeine Grundlagen zur Trigonometrie, aber auch Anleitungen, Planetenpositionen mit dem Taschenrechner zu berechnen und Sternkarten zu Auffinden der wichtigsten Navigationssterne.

2 Navigation auf der Erdkugel

Bevor wir zu den Sternen greifen, machen wir uns zunächst mit der Kugelgestalt der Erde vertraut, indem wir mit festem Kurs ihre Oberfläche erkunden.

2.1 Loxodrome Navigation

Bei dieser Art des “Kurshaltens” fahren wir einen festen rechtweisenden Kurs KüG, so wie wir es von der Ostsee gewöhnt sind. Haben wir auf diesem Kurs eine kleine Distanz ds zurückgelegt, dann sind (wenn ds so klein ist, dass wir von der Krümmung der Erde absehen können)

$$dx = ds \sin(\text{KüG}) , \quad dy = ds \cos(\text{KüG}) \quad (2.1)$$

die jeweils in N-S und E-W Richtung zurückgelegten Wegstrecken. Wenn wir unsere Positionen von der Karte ablesen und die überquerten Längen- und Breitengrade feststellen, können wir diese Wegstrecken auch durch die Längen- und Breitendifferenz $d\lambda$ und $d\varphi$ ausdrücken (siehe Abb. 1)

$$dx = R_\delta \cos(\varphi) d\lambda , \quad dy = R_\delta d\varphi \quad (2.2)$$

Hierbei ist R_δ der Erdradius. Der Faktor $\cos(\varphi)$ berücksichtigt, dass der Breitenkreis der Breite φ nur einen Radius $R_\delta \cos(\varphi)$ besitzt, während der Längengrad immer ein Großkreis ist. Der “globale” Blick auf unsere Wegstrecke ds ist in Abb. 2 veranschaulicht.

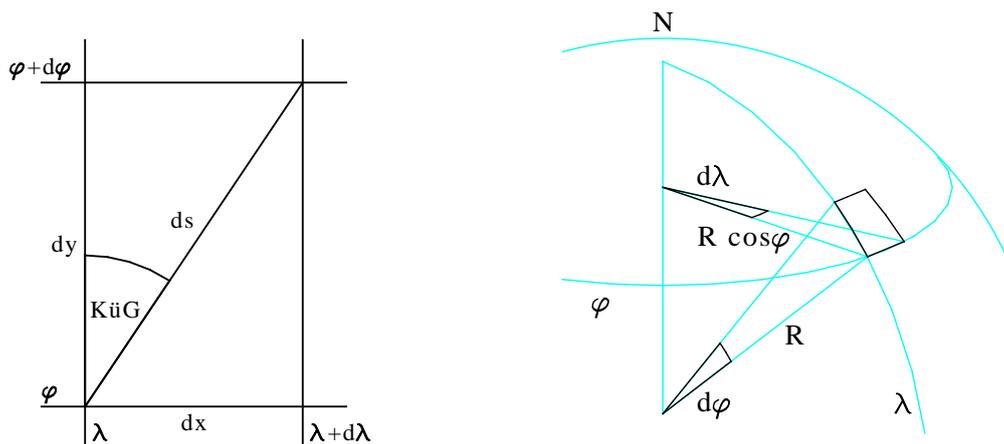


Abbildung 1: Zur Beziehung zwischen den Abmessungen dx , dy und ds und den zugehörigen Änderungen in der Länge $d\lambda$ und Breite $d\varphi$ bei einem Kurswinkel KüG. Siehe (2.1) und (2.2) Abbildung 2: Zur Ableitung von (2.2). Der Längengrad ist ein Großkreis mit dem Radius R_δ , der Breitenkreis hat lediglich den Radius $R_\delta \cos(\varphi)$. Das Rechteck auf der Oberfläche entspricht dem in Abb. 1

Es ist in (2.2) vorausgesetzt, dass $d\lambda$ und $d\varphi$ in Bogenmaß eingesetzt werden und R_δ für den (mittleren) Erdradius von 6378 km steht. Werden $d\lambda$ und $d\varphi$ dagegen in Grad eingesetzt, so ist R_δ durch $60 \text{ sm}/1^\circ$ zu ersetzen. Besonders praktisch ist die Verwendung von $d\lambda$ und $d\varphi$ in Bogenminuten, dann wird R_δ ersetzt durch $1 \text{ sm}/1'$ (siehe hierzu auch Anhang B).

Die Beziehungen (2.1) und (2.2) gelten aber nur für Distanzen, die klein sind (sehr viel kleiner als der Erdradius R_δ), da auf der Kugel der Zusammenhang zwischen dx und $d\lambda$ von der Breite φ abhängt und die verändert sich bei großen Wegstrecken ds ständig.

Wie können wir unsere Endposition (λ_1, φ_1) vorhersagen, wenn wir von (λ_0, φ_0) starten und mit konstantem Kurs KüG eine größere Distanzen s zurücklegen, bei der der Erdradius nicht mehr zu ver-

nachlässigen ist ? Der Zusammenhang zwischen der zurückgelegten N-S Strecke dy und der Breitendifferenz $d\varphi$ ist einfacher als der in E-W Richtung und kann direkt integriert werden (N-S Gleichungen in 2.2 und 2.1)

$$y_1 - y_0 = R_\delta(\varphi_1 - \varphi_0) = s \cos(\text{KüG}) \quad \text{oder}$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{s}{R_\delta} \cos(\text{KüG}) \quad (\text{Bogenmaß})$$

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_0 + 1^\circ \left(\frac{s}{60 \text{ sm}} \right) \cos(\text{KüG})} \quad (2.3)$$

Die Berechnung der Länge λ_1 am Zielort ist aufwendiger. Wenn wir von den E-W Gleichungen von (2.2) und (2.1) ausgehen, erhalten wir nach Elimination von dx und dy

$$\frac{dx}{dy} = \tan(\text{KüG}) = \frac{\cos(\varphi) d\lambda}{d\varphi} \quad \text{oder} \quad d\lambda = \tan(\text{KüG}) \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \quad \text{oder}$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \tan(\text{KüG}) \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi'}{\cos \varphi'} \quad (2.4)$$

Dieses Integral kann man angenähert oder genau bestimmen, wobei wir in jedem Fall vorher aus (2.3) die Breite φ_1 des Endpunktes bestimmt haben müssen, denn diese wird als obere Integrationsgrenze in (2.4) benötigt.

2.1.1 Mittelbreitenverfahren, die angenäherte Variante

In diesem Verfahren wird das Integral in (2.4) einfach durch eine Schätzung des Mittelwertes des Integranden ersetzt, also

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi'}{\cos \varphi'} \simeq \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\cos \bar{\varphi}} \quad \text{wobei} \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_0) \quad (2.5)$$

Damit ergibt sich für (2.4)

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \tan(\text{KüG}) \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_0)} = \lambda_0 + \frac{s/R_\delta}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_0)} \sin(\text{KüG}) \quad (\text{Bogenmaß})$$

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_0 + \tan(\text{KüG}) \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_0)} = \lambda_0 + 1^\circ \left(\frac{s}{60 \text{ sm}} \right) \frac{\sin(\text{KüG})}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_0)}} \quad (2.6)$$

Im letzten Schritt haben wir (2.3) eingesetzt und damit eine Form für die Längendifferenz ähnlich wie (2.3) für die Breitendifferenz erhalten. Trotzdem müssen wir immer (2.3) zuerst ausrechnen, da wir sonst nicht die Mittelbreite $\cos(\varphi_1 + \varphi_0)/2$ bestimmen können.

2.1.2 Die genaue Variante

Zur genauen Berechnung des Integrals in (2.4) verschieben wir den Integrand und Integrationsintervall gemeinsam um $\pi/2$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi'}{\cos \varphi'} = \int_{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}^{\varphi_1 + \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi''}{\sin \varphi''}$$

und substituieren dann φ'' durch die neue Variable $t = \tan(\varphi''/2)$. Integrand und Integrationsmaß transformieren sich entsprechend

$$\sin \varphi'' = 2 \sin\left(\frac{\varphi''}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi''}{2}\right) = 2t \cos^2\left(\frac{\varphi''}{2}\right) = 2t \frac{\cos^2\left(\frac{\varphi''}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\varphi''}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\varphi''}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dt}{d\varphi''} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\varphi''}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\varphi''}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}(1+t^2) \quad \text{damit} \quad \frac{d\varphi''}{\sin \varphi''} = \frac{2dt}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2t} = \frac{dt}{t}$$

So erhalten wir ein Standardintegral, das leicht zu lösen ist

$$\int_{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}^{\varphi_1 + \frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi''}{\sin \varphi''} = \int_{\tan \frac{1}{2}(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}^{\tan \frac{1}{2}(\varphi_1 + \frac{\pi}{2})} \frac{dt}{t} = \ln \frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi_1 + \frac{\pi}{2})}{\tan \frac{1}{2}(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})}$$

Einsetzen ergibt dann statt (2.6) die etwas kompliziertere Formel

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \tan(\text{KüG}) \ln \frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi_1 + \frac{\pi}{2})}{\tan \frac{1}{2}(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})} = \lambda_0 + \tan(\text{KüG})(\Phi_1 - \Phi_0) \quad (\text{Bogenmaß})$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{180^\circ}{\pi} \tan(\text{KüG}) \ln \frac{\tan(\varphi_1/2 + 45^\circ)}{\tan(\varphi_0/2 + 45^\circ)} \quad (2.7)$$

ln ist hier der natürliche Logarithmus und λ kommt zunächst im Bogenmaß heraus. Die Hilfsfunktion $\Phi(\varphi) = \ln \tan \frac{1}{2}(\varphi + \frac{\pi}{2})$ ist die "vergrößerte" Breite, nach der diese Navigationsmethode auch manchmal benannt wird. Zum Umrechnen in Grad müssen wir mit $180^\circ/\pi$ multiplizieren, für Bogenminuten wäre der Faktor 60 mal größer: $10800'/\pi$.

Vorzeichenprobleme oder Singularitäten treten in Φ nicht auf. Wenn wir nicht gerade an den Polen starten ($\varphi_0 = \pm\pi/2$), ist das Argument des Tangens immer zwischen 0 und $\pi/2$ und die tan-Funktionen liefert immer positive Werte, auch bei negativen Breiten. An den Polen bekommen wir aber sowieso Probleme: der Logarithmus des Tangens wird ∞ , unser Kurswinkel KüG ist nicht mehr gut auszumachen und wir bekommen kalte Füße.

Zusammengefasst:

Startpunkt, Kurs KüG und Distanz s sind bekannt, Endpunkt nach Mittelbreite	
Datum	
Entfernung s	in sm
Kurs KüG	cos, tan abspeichern
Startbreite φ_0	abspeichern
$+\Delta\varphi$	$= (s/60) \cos(\text{KüG})$; abspeichern
Endbreite φ_1	
Mittelbreite $\bar{\varphi}$	$= \varphi_0 + \frac{1}{2}\Delta\varphi$; $\cos(\bar{\varphi})$ abspeichern
Startlänge λ_0	
$+\Delta\lambda$	$= \Delta\varphi \tan(\text{KüG}) / \cos(\bar{\varphi})$
Endlänge λ_1	

Startpunkt und Endpunkt sind bekannt, Kurs KüG und Distanz s nach Mittelbreite	
Datum	
Endbreite φ_1 – Startbreite φ_0	
$\Delta\varphi$	abspeichern
Mittelbreite $\bar{\varphi}$	$= \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1)$; $\Delta\varphi / \cos(\bar{\varphi})$ abspeichern
Endlänge λ_1 – Startlänge λ_0	
$\Delta\lambda$	abspeichern
Kurs KüG	$= \text{atan}(\Delta\lambda \cos(\bar{\varphi}) / \Delta\varphi)$; \cos abspeichern
Entfernung s	$= 60\Delta\varphi / \cos(\text{KüG})$; in sm

Startpunkt, Kurs KüG und Distanz s sind bekannt, Endpunkt nach vergrößerter Breite	
Datum	
Entfernung s	in sm
Kurs KüG	\cos, \tan abspeichern
Startbreite φ_0 + $\Delta\varphi$	abspeichern $= (s/60) \cos(\text{KüG})$
Endbreite φ_1	abspeichern
$\tilde{\varphi}_1$	$= \varphi_1/2 + 45^\circ$; $\tan \tilde{\varphi}_1$ abspeichern
$\tilde{\varphi}_0$	$= \varphi_0/2 + 45^\circ$; $\tan \tilde{\varphi}_0$ abspeichern
Diff. gestreckte Breite $\Delta\Phi$	$= (180^\circ/\pi) \ln(\tan \tilde{\varphi}_1 / \tan \tilde{\varphi}_0)$ abspeichern
Startlänge λ_0 + $\Delta\lambda$	$= \Delta\Phi \tan(\text{KüG})$
Endlänge λ_1	

Startpunkt und Endpunkt sind bekannt, Kurs KüG und Distanz s nach vergrößerter Breite	
Datum	
Endbreite φ_1 – Startbreite φ_0	abspeichern abspeichern
$\Delta\varphi$	abspeichern
$\tilde{\varphi}_1$	$= \varphi_1/2 + 45^\circ$; $\tan \tilde{\varphi}_1$ abspeichern
$\tilde{\varphi}_0$	$= \varphi_0/2 + 45^\circ$; $\tan \tilde{\varphi}_0$ abspeichern
Diff. gestreckte Breite $\Delta\Phi$	$= (180^\circ/\pi) \ln(\tan \tilde{\varphi}_1 / \tan \tilde{\varphi}_0)$ abspeichern
Endlänge λ_1 – Startlänge λ_0	
$\Delta\lambda$	abspeichern
Kurs KüG	$= \text{atan}(\Delta\lambda / \Delta\Phi)$; \cos abspeichern
Entfernung s	$= 60\Delta\varphi / \cos(\text{KüG})$; in sm

Im letzten Kasten hätten wir den Kurs KüG auch aus der Karte ablesen können. Die Tatsache, dass bei der graphischen wie rechnerischen Kursbestimmung das Gleiche heraus kommt, liegt daran, dass die Mercatorprojektion Längen und Breiten nach dem Gesetz

$$x_{\text{Karte}} = cR_\delta \lambda, \quad y_{\text{Karte}} = cR_\delta \Phi(\varphi) = cR_\delta \ln \tan \frac{1}{2}(\varphi + \frac{\pi}{2})$$

abbildet. Die Zahl c ist hier ein beliebiger Abbildungsmaßstab. Die eigentliche Breite ist also durch die “vergrößerte” Breite ersetzt, so dass aus einer Loxodrome (2.7) auf der Mercatorkarte genau eine Gerade mit der Kursneigung KüG wird. Die Entfernung s in im letzten Kasten muss aus diesem Grunde immer rechnerisch ermittelt werden. Von der Seekarte kann sie nicht abgelesen werden, denn die Mercatorprojektion ist wegen der Breitenstreckung nicht mehr längentreu. Der Abstand zweier benachbarter Breitenminuten in der Seekarte kann nur in der Nähe dieses Breitenkreises als Maß für eine Seemeile erhalten. Wir können der Karte also keine Distanzen entnehmen, die sich über einen größeren Breitenbereich erstreckt.

2.2 Orthodrome Navigation

Der orthodrome Kurs liegt immer auf einem Großkreis und liefert somit immer die kürzeste Strecke s zwischen Start- und Zielpunkt. Es gibt natürlich noch ein paar andere Gesichtspunkte, nach denen der Kurs ausgewählt wird, z.B. wenn ein Tief, ungünstige Strömung oder gar eine Insel im Weg ist. Aber die kürzeste Entfernung ist immerhin ein starkes Argument.

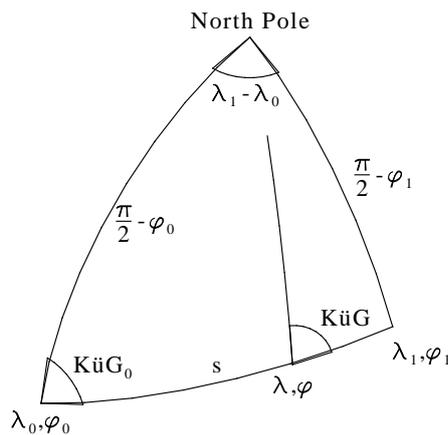


Abbildung 3: Sphärisches Dreieck, das aus dem Pol, dem Anfangs- und Endpunkt der Kursstrecke gebildet wird. Der Endpunkt (λ_1, φ_1) kann durch jeden anderen Punkt (λ, φ) auf der Strecke s ersetzt werden. Ist bei (λ, φ) der Kurswinkel KüG, dann ist $\pi - \text{KüG}$ der Innenwinkel im sphärischen Dreieck gebildet mit (λ_0, φ_0) und Nordpol.

Da unser Kurs jetzt auf einem Großkreis liegt, bilden Start- und Endpunkt, (λ_0, φ_0) und (λ_1, φ_1) , unserer Reise und der Nordpol ein echtes sphärisches Dreieck (siehe Abb. 3) und wir können mit der vollen Kraft der Dreieckssätze (siehe Anhang D) zuschlagen.

Wir wenden uns wieder zuerst dem Problem zu, dass wir eine bestimmte Distanz s von (λ_0, φ_0) auf dem Großkreis mit dem Anfangskurs KüG₀ segeln wollen. Zunächst bestimmen wir mit dem Seitenkosinussatz (D.2) die Breite φ_1 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) \sin\left(\frac{s}{R_\delta}\right) \cos(\text{KüG}_0) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) \cos\left(\frac{s}{R_\delta}\right) \quad \text{oder}$$

$$\varphi_1 = \text{asin}\left(\cos(\varphi_0) \sin\left(\frac{s}{R_\delta}\right) \cos(\text{KüG}_0) + \sin(\varphi_0) \cos\left(\frac{s}{R_\delta}\right)\right) \quad (\text{Bogenmaß})$$

$$\boxed{\varphi_1 = \text{asin}\left(\cos(\varphi_0) \sin\left(\frac{s}{60 \text{ sm}}\right) \cos(\text{KüG}_0) + \sin(\varphi_0) \cos\left(\frac{s}{60 \text{ sm}}\right)\right)} \quad (2.8)$$

Von den möglichen Lösungen des Arkussinus ist natürlich immer nur die eine im erlaubten Breitenbereich

$[-\pi/2, \pi/2]$ auszuwählen. Zur Bestimmung der Länge λ_1 nutzen wir den Sinussatz

$$\frac{\sin(\text{KüG}_0)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi_0)} = \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_0)}{\sin(\frac{s}{R_\delta})} \quad \text{oder}$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \text{asin}\left(\frac{\sin(\text{KüG}_0)}{\cos(\varphi_1)} \sin\left(\frac{s}{R_\delta}\right)\right) \quad (\text{Bogenmaß})$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \text{asin}\left(\frac{\sin(\text{KüG}_0)}{\cos(\varphi_1)} \sin\left(\frac{s}{60 \text{ sm}}\right)\right)$$

(2.9)

Hier ist die Mehrdeutigkeit des Arkussinus schon unangenehmer. Die Länge λ_1 kann im gesamten Winkelbereich liegen und wir haben immer zwei Lösungen zur Auswahl: mit jedem λ_1 ist auch $\pi - \lambda_1$ eine Lösung. Das Problem ist aber hier noch nicht so gravierend, denn wir haben immer eine grobe Vorstellung, wo wir landen wollen.

Ist es wirklich einmal nicht ganz klar, z.B. wenn $|\lambda_1 - \lambda_0|$ dicht bei $\pi/2$ liegt, entscheiden wir folgendermaßen. Für die beiden Lösungen gilt: würden wir ein bisschen weiter segeln und s etwas vergrößern, würde in dem einen Fall φ_1 zunehmen und wir nähern uns dem Zielpunkt mit östlichem Kurs, in dem anderen Fall würde φ_1 abnehmen und wir würden ihn mit westlichem Kurs erreichen. Es ist aber sofort klar, dass wir auf einem Großkreis eine anfängliche östliche oder westliche Richtung immer beibehalten werden. Somit ist die Lösung eindeutig durch unseren Anfangskurs KüG_0 bestimmt: ist er nach Osten gerichtet, muß λ_1 auch am Zielort mit zunehmendem s anwachsen. Mit einem KüG_0 nach Westen muß λ_1 immer, auch am Zielort, mit zunehmender Strecke s abnehmen.

Während der Versegelung auf dem Großkreis muss der Kurs immer nachgeregelt werden. Der KüG_0 in (2.8) und (2.9) ist nur der Kurs, mit dem wir loslegen. Nach dem Sinussatz (D.4) gilt entlang der Kursstrecke für den Kurs, den wir bei Erreichen der Breite φ absetzen müssen

$$\frac{\sin(\pi - \text{KüG})}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi_0)} = \frac{\sin(\text{KüG}_0)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \quad \text{oder}$$

$$\text{KüG} = \text{asin}\left(\sin(\text{KüG}_0) \frac{\cos(\varphi_0)}{\cos(\varphi)}\right)$$

(2.10)

Diese Gleichung kann wahlweise in Bogenmaß oder Gradmaß aufgefasst werden. Die Breite φ an jeder Stelle der Strecke können wir auch aus der jeweils zurückgelegten Distanz berechnen. Dazu benutzen wir (2.8) und ermitteln φ wie φ_1 , indem wir dort für s die jeweils zurückgelegte Strecke vom Startpunkt einsetzen. Das leidige Problem der Mehrdeutigkeit des Arkussinus (2.10) behandeln wir im folgenden Absatz, wir müssen dazu etwas ausholen.

Der Kurs KüG kann, wie wir oben festgestellt haben, nie seine Ost-West-Orientierung ändern, wohl aber die in Nord-Südrichtung. Je weiter wir uns den Polen auf einem Großkreiskurs nähern, desto kleiner wird der Wert für $\cos(\varphi)$ im Nenner von (2.10). Der Kurs KüG muss also bei Entfernung vom Äquator immer mehr in Ost- bzw. Westrichtung korrigiert werden, bis mit $|\sin(\text{KüG}_0)| = 1$ die höchstmögliche Breite erreicht ist und der Kurs genau in Ost- oder Westrichtung weist. Diese Breite des Scheitelpunktes unserer Kursbahn lautet somit

$$\varphi_{\max} = \pm \text{acos}|\sin(\text{KüG}_0) \cos(\varphi_0)|$$

(2.11)

Die Distanz vom Startpunkt zum Scheitelpunkt erhalten wir wieder aus dem Seitenkosinussatz, wobei wir ausnutzen, dass der Kurswinkel im Scheitelpunkt gerade $\pi/2$ oder $3\pi/2$ beträgt.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) &= \sin\left(\frac{s_{\max}}{R_\delta}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\max}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{s_{\max}}{R_\delta}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\max}\right) \\ &= \cos\left(\frac{s_{\max}}{R_\delta}\right) \sin(\varphi_{\max}) \quad \text{oder} \quad \frac{s_{\max}}{R_\delta} = \text{acos}\left(\frac{\sin(\varphi_0)}{\sin(\varphi_{\max})}\right) \quad (\text{Bogenmaß}) \end{aligned}$$

$$\boxed{s_{\max} = \frac{60 \text{ sm}}{1^\circ} \operatorname{acos}\left(\frac{\sin(\varphi_0)}{\sin(\varphi_{\max})}\right)} \quad (2.12)$$

Zur Berechnung der Länge des Scheitelpunktes bemühen wir den zweiten Seitenkosinussatz, ersetzen $\cos(s_{\max}/R_\delta)$ mit Hilfe von (2.12) und lösen nach der Längendifferenz auf:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{s_{\max}}{R_\delta}\right) &= \frac{\sin(\varphi_0)}{\sin(\varphi_{\max})} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\max}\right) \cos(\lambda_{\max} - \lambda_0) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\max}\right) \quad \text{gibt} \\ \cos(\lambda_{\max} - \lambda_0) &= \frac{\sin(\varphi_0)/\sin(\varphi_{\max}) - \sin(\varphi_0) \sin(\varphi_{\max})}{\cos(\varphi_0) \cos(\varphi_{\max})} = \frac{\tan(\varphi_0)(1 - \sin^2(\varphi_{\max}))}{\sin(\varphi_{\max}) \cos(\varphi_{\max})} = \frac{\tan(\varphi_0)}{\tan(\varphi_{\max})} \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda_{\max} = \lambda_0 + \operatorname{acos}\left(\frac{\tan(\varphi_0)}{\tan(\varphi_{\max})}\right)} \quad (2.13)$$

Diese Gleichung kann in Bogen- oder Gradmaß gleichermaßen gelesen werden. Starten wir am Äquator ($\varphi = 0$), so ist immer $|\varphi_{\max}| = |\pi/2 - \text{KüG}_0|$ oder $|\varphi_{\max}| = |3\pi/2 - \text{KüG}_0|$. Die Länge des Scheitelpunktes ist dann immer $\lambda_{\max} \pm \pi/2$.

Nun zurück zum Arkussinus in (2.10): Haben wir auf unserer Strecke zwischen Startpunkt und dem Punkt, für den wir in (2.10) den aktuellen Kurs berechnen wollen, den Scheitel (2.11) noch nicht passiert, liegt KüG in dem gleichen Quadranten wie der Anfangskurs KüG₀. Liegt der Scheitel hinter uns, ist der KüG in (2.10) zu wählen, der gegenüber KüG₀ die umgekehrte Nord-Südrichtung hat.

Jetzt der Fall, dass Start- und Endpunkt (λ_0, φ_0) und (λ_1, φ_1) bekannt sind. Zunächst bestimmen wir die zu segelnde Distanz s . Sie folgt aus dem Seitenkosinussatz (D.2):

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{s}{R_\delta}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) \cos(\lambda_1 - \lambda_0) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) \quad \text{oder} \\ \frac{s}{R_\delta} &= \operatorname{acos}\left(\cos(\varphi_0) \cos(\varphi_1) \cos(\lambda_1 - \lambda_0) + \sin(\varphi_0) \sin(\varphi_1)\right) \quad (\text{Bogenmaß}) \end{aligned}$$

$$\boxed{s = \frac{60 \text{ sm}}{1^\circ} \operatorname{acos}\left(\cos(\varphi_0) \cos(\varphi_1) \cos(\lambda_1 - \lambda_0) + \sin(\varphi_0) \sin(\varphi_1)\right)} \quad (2.14)$$

Für die Ermittlung des Anfangskurses muss wieder der Sinussatz herhalten, den wir schon für (2.9) benutzt haben. Jetzt lösen wir ihn nach $\sin(\text{KüG}_0)$ auf.

$$\text{KüG}_0 = \operatorname{asin}\left(\frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_0)}{\sin\left(\frac{s}{R_\delta}\right)} \cos(\varphi_1)\right) \quad (\text{Bogenmaß})$$

$$\boxed{\text{KüG}_0 = \operatorname{asin}\left(\frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_0)}{\sin\left(\frac{s}{60 \text{ sm}}\right)} \cos(\varphi_1)\right)} \quad (2.15)$$

Die Mehrdeutigkeit des Arkussinus stellt wieder ein kleines Problem dar. Mit einem Winkel KüG₀ ist ja wieder auch $\pi - \text{KüG}_0$ eine Lösung. Sind wir sicher, dass auf unserem Weg zum Zielort der Scheitelpunkt der Bahn nicht in der ersten Hälfte unserer Strecke liegt, ist der Quadrant des Winkels KüG₀ der, den wir aufgrund der Längen- und Breitendifferenz $\lambda_1 - \lambda_0$ und $\varphi_1 - \varphi_0$ erwarten würden. Liegt der Scheitelpunkt innerhalb der ersten Streckenhälfte, muß die Nord-Süd Orientierung von KüG₀ gegen die Richtung von $\varphi_1 - \varphi_0$ umgekehrt werden (Vorrausgesetzt ist hier immer, dass wir den Erdball maximal halb umsegeln). Ein typischer Fall ist hier der Kurs der Flugzeuge von Frankfurt z.B. nach Washington. Obwohl das Ziel südlich des Startpunktes liegt, muß KüG₀ nach Norden gerichtet werden, denn der Scheitelpunkt der Flugbahn liegt dichter an Frankfurt als an Washington.

Im Zweifelsfall können wir 2.8 nach $\cos(\text{KüG}_0)$ auflösen und KüG₀ über den Arkuskosinus bestimmen. Da über die Ost-West Orientierung kein Zweifel bestehen sollte, gibt es hier keine gravierende

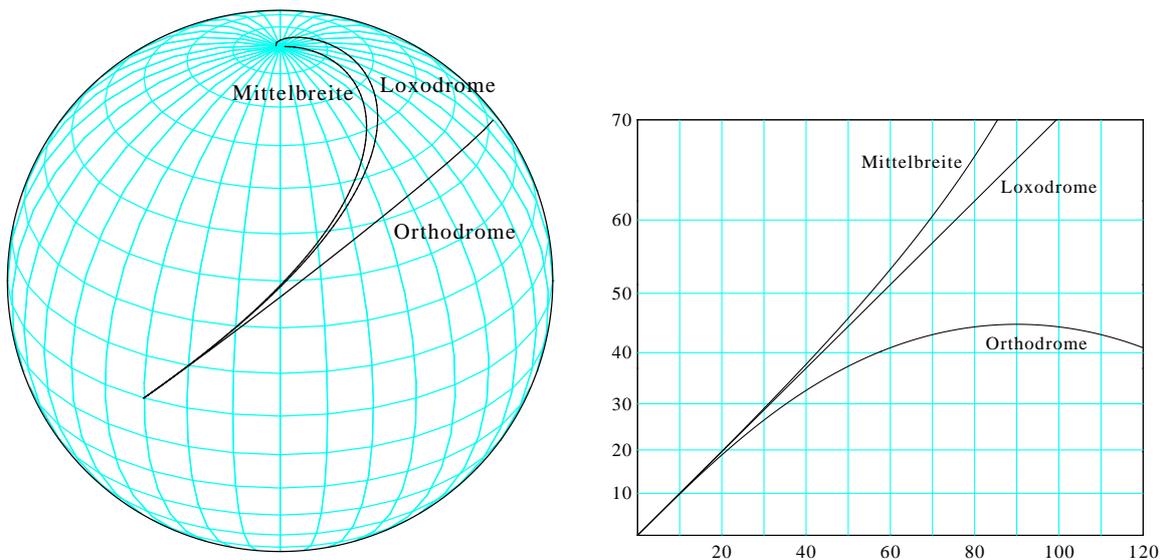


Abbildung 4: Vergleich der Kurse nach dem Mittelbreitenverfahren, der exakten Loxodrome und Orthodrome (Großkreis). Die Kurse sind jeweils auf der Erdkugel und in der Mercatorprojektion für einen Startpunkt auf dem Äquator und mit einem Anfangskurs KüG=45° dargestellt. Der Scheitelpunkt des Großkreises liegt bei $\varphi = 45^\circ$ und $\lambda = 90^\circ$.

Mehrdeutigkeit. Heraus kommt

$$\text{KüG}_0 = \text{acos}\left(\frac{\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_0) \cos(s/R_\delta)}{\cos(\varphi_0) \sin(s/R_\delta)}\right) \quad (\text{Bogenmaß})$$

$$\boxed{\text{KüG}_0 = \text{acos}\left(\frac{\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_0) \cos(s/60 \text{ sm})}{\cos(\varphi_0) \sin(s/60 \text{ sm})}\right)} \quad (2.16)$$

als sichere aber etwas aufwendigere Alternative zu (2.15).

Zusammengefasst:

Startpunkt, Anfangskurs KüG ₀ und Distanz s sind bekannt, Endpunkt auf Großkreis	
Datum	
Entfernung s	in sm; $\cos(s/60)$, $\sin(s/60)$ abspeichern
Kurs KüG ₀	\cos , \sin abspeichern
Startbreite φ_0	\cos , \sin abspeichern
Endbreite φ_1	nach (2.8); \cos abspeichern
Startlänge λ_0	
+ $\Delta\lambda$	nach (2.9)
Endlänge λ_1	
Endkurs KüG ₁	nach (2.10)

Startpunkt und Endpunkt sind bekannt, Anfangskurs KüG ₀ und Distanz s auf Großkreis	
Datum	
Endbreite φ_1	cos, sin abspeichern
Startbreite φ_0	cos, sin abspeichern
Endlänge λ_1	
– Startlänge λ_0	
$\Delta\lambda$	cos, sin abspeichern
Entfernung s	nach(2.14); $\cos(s/60)$, $\sin(s/60)$ abspeichern
Anfangskurs KüG ₀	nach (2.15) oder (2.16)
Endkurs KüG ₁	nach (2.10)
Scheitelbreite φ_{\max}	nach (2.11)
Dist zum Scheitel s_{\max}	aus (2.12)
Scheitellänge λ_{\max}	nach (2.13)

Praktisch könnte die Gesamtstrecke zwischen Start- und Endpunkt in ~ 100 sm große Teilstrecken geteilt und mit den obigen Formeln nach den Strecken $s = n \times 100$ sm, $n \in \mathbb{N}$ jeweils Wegpunkte auf dem Großkreis vorausberechnet werden. Diese werden dann dann sukzessive abgesegelt, an jedem dieser Wegpunkt wird dann eine Kursänderung in Richtung auf den nächsten vorgenommen, die automatisch etwa (2.10) entspricht.

In Abb. 4 sind noch einmal die drei Kurstypen für ein Beispiel gegenüber gestellt. Drei Schiffe starten an der gleichen Stelle am Äquator mit dem KüG₀ = 45° und segeln nach den angegebenen Verfahren. Beim Mittelbreitenverfahren wurde zur Berechnung der Länge nach (2.6) immer zwischen der Breite $\varphi_0 = 0^\circ$ (Äquator) und der laufenden Breite φ_1 gemittelt.

3 Koordinatensysteme

Wenn wir unsere Position auf der Erdoberfläche aus Sternbeobachtungen bestimmen wollen, müssen wir die Position der Sterne bzw. der Sonne zu jedem Zeitpunkt hinreichend genau beschreiben können. Als erstes müssen wir uns also um geeignete Koordinatensysteme kümmern, in denen die Sternposition festgelegt werden kann.

Am besten ist uns das geographische Koordinatensystem bekannt, das nach der Rotationsachse der Erde (Pol P) ausgerichtet ist und sich mit ihr erdfest dreht. Die Breite φ wird vom Erdäquator aus gemessen, die Länge λ vom Greenwich Meridian positiv nach Osten (Abb. 6 links). Ein fast gleiches System wird für die Festlegung der Sternpositionen benutzt. Es ist ebenfalls nach der Rotationsachse der Erde ausgerichtet, die Breite eines Sterns heißt dort Deklination δ und die Länge Rektazension α (im Englischen: declination und right ascension). Die Rektazension wird wie die Länge positiv nach Osten gezählt. In der Nautik ist statt dessen der nach Westen positive Sternwinkel SHA = $360^\circ - \alpha$ (Sideral Hour Angle, in dt. mit β bezeichnet) in Gebrauch. Beide Längen des Sternkoordinatensystems werden vom Längengrad des Frühlingspunktes (vernal equinox, früher im Sternbild Aries, daher das Symbol Υ für den Widderkopf) aus gemessen (Abb. 6 rechts). Anders als der Greenwich Meridian im erdfesten Äquatorialsystem, der eine willkürliche politische Vereinbarung ist, zeichnet sich der Frühlingspunkt in natürlicher Weise aus. Er bezeichnet die Richtung, entlang der sich die Äquatorebene und die Ebene der Ekliptik, die durch die Umlaufbahn der Erde um die Sonne definiert ist, schneiden (Abb. 5). Durch die Erddrehung scheint sich für einen Betrachter auf der Erde der Frühlingspunkt und mit ihm alle Sterne und damit das ganze Sternkoordinatensystem nach Westen zu drehen. Ein ganzer Umlauf benötigt dabei einen Sterntag, etwa 4 min weniger als ein normaler Sonnentag.

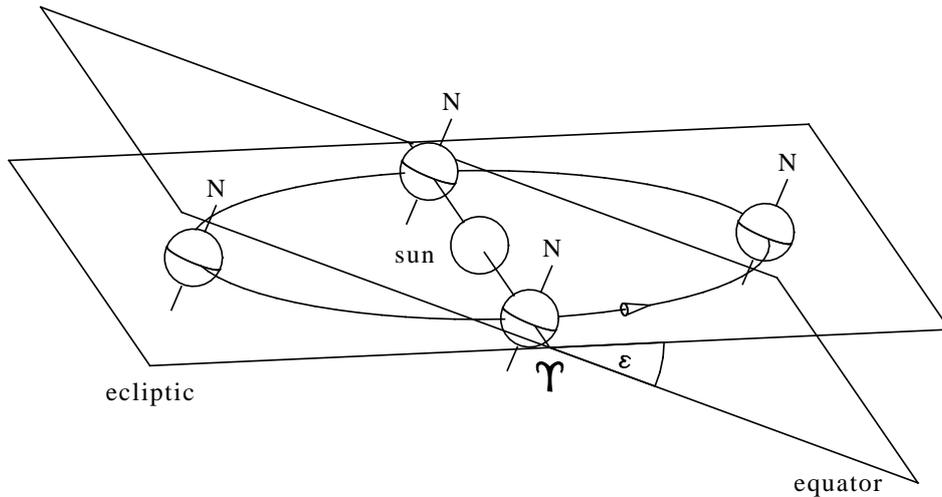


Abbildung 5: Bahnenebene der Erde um die Sonne (Ekliptik) und Äquatorebene der Erde sind um den Winkel $\epsilon \sim 23^\circ 5'$ gegeneinander geneigt. Die Schnittgrade beider Ebenen definiert den Frühlings- und Herbstpunkt. Der Frühlingspunkt (Υ) ist in der Richtung in der die Erde nach Süden unter die Ekliptik taucht, die Sonne also scheinbar wieder nach Norden auftaucht.

Die aktuelle Orientierung beider Koordinatensysteme wird an dem Winkel zwischen den jeweiligen Bezugsmeridianen von Greenwich und Frühlingspunkt gemessen (Abb. 7). Da dieser Winkel stetig mit der Zeit anwächst, kann er auch als Zeitmaß dienen und wird daher Greenwich Sternzeit GST (Greenwich Sideral Time, im Dt. übliches Symbol: Gr_{Υ}) genannt

$$\text{GST} \simeq \text{westl. Länge des Frühlingspunktes}$$

Sternzeiten, Rektazension und Stundenwinkel werden wahlweise im Winkelmaß (Grad oder Bogenmaß) oder auch in einem Zeitmaß angegeben. Z.B. bedeutet $6^{\text{h}}0$ GST also nichts anderes als dass der Frühlingspunkt bei einer Länge von 90° W steht und sagt zunächst noch nichts über die Tageszeit aus. Weitere Zusammenhänge zwischen den für Winkel gebräuchlichen Einheitensystemen sind in Tabelle 1 dargestellt. So bedeutet die Angabe, der Sonnendurchmesser betrage etwa 2^{m} , dass die Sonne in 2 Sonnenminuten (in diesem Fall sind das gerade die Minuten, die auch unsere Uhren anzeigen) um ihren eigenen Durchmesser am Himmel weiterwandert.

Die Umrechnung zwischen dem geographischen und dem Himmelsäquatorsystem ist denkbar einfach, da sie ja beide entlang der Erdrotationsachse ausgerichtet sind. Breite und Deklination sind zunächst nur verschiedene Namen für den gleichen Winkel, denn beide werden ja vom (fast) gleichen Äquator aus

in Grad	in Bogenmaß	in Zeiteinheiten
$\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$	$\frac{2\pi}{24} = 0.2617884\dots$	1^{h}
1°	$\frac{2\pi}{360} = 0.0174533\dots$	$\frac{24^{\text{h}}}{360} = 0^{\text{h}}06667\dots = 4^{\text{m}}$
Sonnendurchmesser $\simeq 32'$	$0.009308\dots$	$2^{\text{m}}1$
$\frac{360^\circ}{1440} = 0^\circ 25' = 15''$	$\frac{2\pi}{1440} = 0.0043633\dots$	1^{m}
$1'$	$\frac{2\pi}{60 \cdot 360} = 0.00029089\dots$	$\frac{24 \cdot 60^{\text{m}}}{60 \cdot 360} = 0^{\text{m}}0667\dots = 4^{\text{s}}$
$\frac{360^\circ}{86400} = 0' 25'' = 15''$	$\frac{2\pi}{86400} = 0.0000727\dots$	1^{s}

Tabelle 1: Gegenüberstellung einiger Winkel in verschiedenen Maßeinheiten.

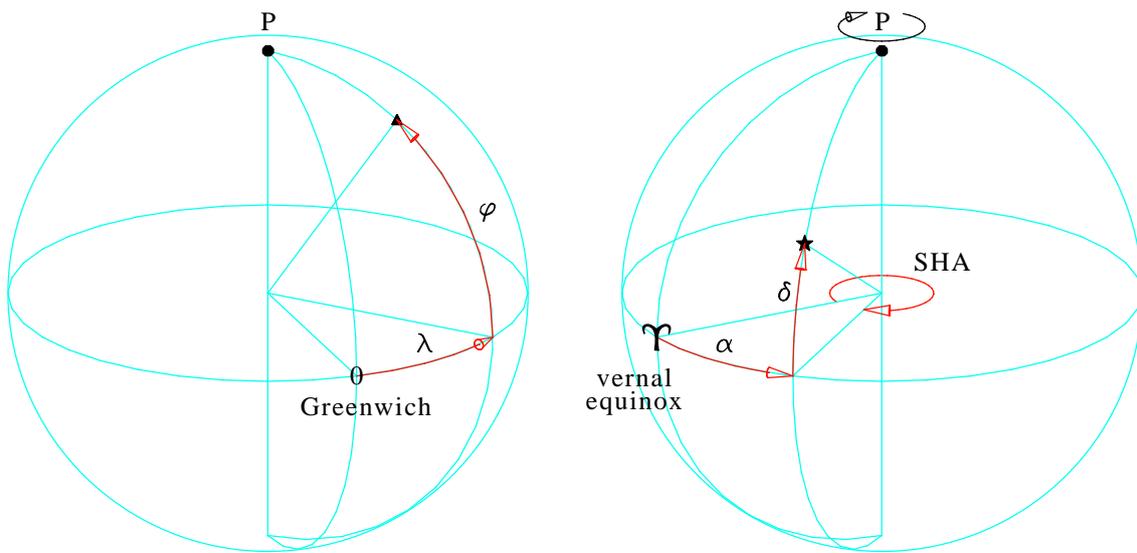


Abbildung 6: Äquatoriales System für die die Erdoberfläche und den Fixsternenhimmel. λ und φ sind (östliche) geographische Länge und Breite eines Beobachters (▲). α und δ sind die Rektazension und Deklination eines Sterns (*). Bezugslänge für die Rektazension ist der Frühlingspunkt (♈). In der Nautik wird statt der Rektazension auch der Sternwinkel $\text{SHA} = 360^\circ - \alpha$ benutzt.

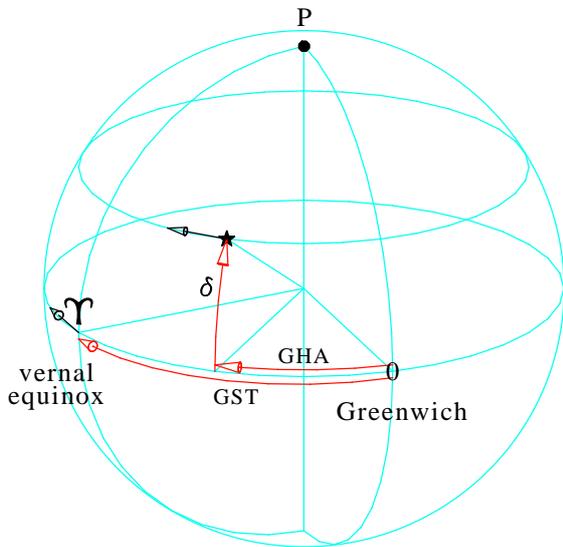


Abbildung 7: Beziehung zwischen dem Fixsternen- und dem erdfesten Äquatorialsystem. Der Winkel zwischen den beiden Systemen ist die Greenwich Sternzeit GST. Im erdfesten Äquatorialsystem sind die Koordinaten eines Sternes (GHA, δ), im Fixsternensystem (α , δ) wobei $\text{GHA} + \alpha = \text{GST}$

gemessen. Die negative, westliche Länge eines Sternes wird im erdfesten System Greenwich Stundenwinkel GHA (Greenwich hour angle, in dt. übliches Symbol Grt) genannt und ergibt sich aus (Abb. 7)

$$\text{GHA}_* \simeq \text{GST} - \alpha_* = \text{GST} + \text{SHA}_* \quad (3.1)$$

Er entspricht genau der Sternzeit, die seit dem Meridiandurchgang des Sternes in Greenwich vergangen ist.

Ist der Bezugsort nicht Greenwich sondern irgend ein anderer nach Osten um die Länge λ versetzter Ort, heißt die Längendifferenz zum Stern lokaler Stundenwinkel (Local hour angle LHA, in dt. übliches Symbol ist t). Er ist entsprechend um λ größer als in Greenwich

$$\text{LHA}_* = \text{GHA}_* + \lambda \simeq \text{GST} + \lambda - \alpha_* = \text{LST} - \alpha_* = \text{LST} + \text{SHA}_* \quad (3.2)$$

Hier haben wir $\text{GST} + \lambda$ zur lokalen Sternzeit LST zusammengefasst, so dass formal eine Beziehung ähnlich der für Greenwich (3.1) entsteht.

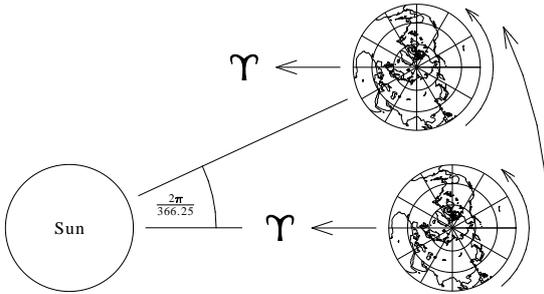


Abbildung 8: Rotation und Orbitalbewegung der Erde führen zu einer unterschiedlich schnellen scheinbaren Westwärtswanderung von Sternen und Sonne. Nach einem Sterntag ist die Erde um den Winkel $2\pi/366.25$ auf ihrem Weg um die Sonne weiter gewandert, der Frühlingspunkt Ψ steht dann über dem gleichen Meridian, Sonne ist scheinbar aber um genau diesen Winkel im Osten gegenüber dem Sternenhimmel zurückgeblieben.

Die Sonne ist auch ein Stern und im Prinzip können wir auch für sie eine Rektazension und Deklination angeben. Dies macht aber nur bedingt Sinn, da diese Koordinaten nicht konstant sind, denn im Laufe eines Jahres wandert die Sonne von der Erde aus gesehen durch das Fixsternensystem entlang der Ebene der Ekliptik. Die Sonne bewegt sich dabei scheinbar etwas langsamer nach Westen als der Sternhimmel (Abb. 8), so dass α_\odot in einem Jahr kontinuierlich (aber leider nicht ganz gleichförmig) anwächst. Nach einem Jahr hat sich der Sternhimmel dann einmal häufiger gedreht als die Sonne. Den etwa 365.25 Sonnentagen des Jahres entsprechen also 366.25 Sterntage und α_\odot hat sich in dieser Zeit um 360° vergrößert. Zudem schwankt die Deklination δ_\odot je nach Jahreszeit entsprechend der Neigung der Äquatorebene gegen die Ekliptik zwischen $+23^\circ 5'$ und $-23^\circ 5'$.

Da ist es einfacher, gar nicht erst auf das Sternsystem Bezug zu nehmen, denn die Sonne definiert ja durch ihre Wanderungsbewegung die Sonnenzeit, an die wir unsere zivile Zeit anpassen:

$$\text{GHA}_\odot \simeq \text{GMT} - 12^{\text{h}} = \text{UT} - 12^{\text{h}} \quad (3.3)$$

(Greenwich Mean Time GMT wurde 1928 als Standardzeit von UT abgelöst, beide sind aber für unsere Zwecke praktisch identisch). Der Unterschied von 12^{h} rührt daher, dass GMT um Mitternacht beginnt, Stundenwinkel von Sternen und Sonne aber von der Kulmination im Mittagsmeridian an gezählt werden. Entsprechend gilt für einen Ort mit dem Längengrad λ

$$\text{LHA}_\odot = \text{GHA}_\odot + \lambda \simeq \text{GMT} + \lambda - 12^{\text{h}} = \text{LMT} - 12^{\text{h}} \quad (3.4)$$

Die lokale mittlere Sonnenzeit $\text{LMT} = \text{GMT} + \lambda = \text{UT} + \lambda$ (Local mean Time, im Dt. MOZ abgekürzt) stimmt in den meisten Gegenden der Erde bis auf eine Stunde mit der dort jeweils gültigen Zonenzeit (bei uns Central European Time, CET) überein.

Die Koordinaten der Äquatorialsysteme können leider nicht direkt beobachtet werden, daher benötigen wir noch ein weiteres Koordinatensystem, das dem Beobachter speziell angepasst ist, das Horizontalsystem. Dieses System ist nach der Zenitrichtung (Z) des Beobachters ausgerichtet (Abb. 9 links). Senkrecht dazu verlaufen die horizontalen Richtungen Nord(N), Ost(E), Süd(S) und West(W). Sie bilden eine Ebene, die dem Horizont des Beobachters entspricht. Die Polrichtung (P) der Erdrotationsachse liegt dann in der Ebene, die von N, Z und S aufgespannt wird, der Winkel zwischen P und N ist genau die geographische Breite des Beobachters.

Ein Stern hat in diesem System die beiden Winkelkoordinaten: die Höhe H über der Horizontebene und die Azimutrichtung A gegen Nord. Der Azimutwinkel ist hierbei im Uhrzeigersinn, also von Nord über

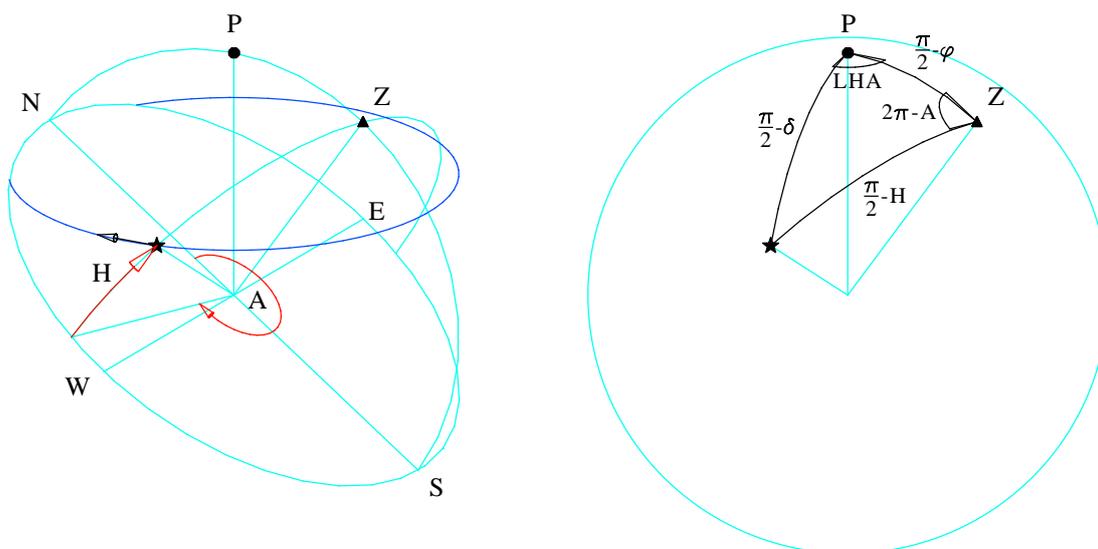


Abbildung 9: Horizontalsystem (links) und Nautisches Dreieck (rechts) auf der Einheitskugel mit den Ecken Polrichtung (P), Beobachterzenit (Z) und Sternrichtung (*). Im Horizontalsystem liegen N, E, S, W in der Ebene des Horizonts des Betrachters. In diesem System sind die Sternkoordinaten Azimut A und Höhe H . Der Winkel zwischen P und N ist so groß wie die geographische Breite φ des Beobachters, der Winkel zwischen P und Z also $\pi/2 - \varphi$ wie im Nautische Dreieck angegeben.

Ost definiert. Im Laufe der Zeit nimmt der Azimutwinkel wegen der Erddrehung bei den Himmelskörpern in der Regel zu. Ausnahmen sind die Sterne, die eine größere Deklination als die Breite des Betrachters besitzen, denn sie kulminieren polwärts des Zenits.

Wie stehen nun das Horizontalsystem und das äquatoriale System miteinander in Beziehung? Dieser Zusammenhang wird üblicherweise in dem wichtigen Nautischen Dreieck aus Pol (P), Zenit des Beobachters (Z) und Richtung des Himmelskörpers (*) dargestellt (Abb. 9 rechts). In diesem sphärischen Dreieck tauchen sowohl die Stern- und Beobachterkoordinaten LHA, δ und φ der äquatorialen Systeme als auch der Azimut A und die Höhe H des Horizontalsystems auf.

Auf dieses Dreieck lassen wir nun wieder die geballte Kraft der sphärischen Geometrie (zum Auffrischen siehe Anhang D) los. Wir haben Bezeichnungen für alle drei Seiten des Dreiecks und für zwei Innenwinkel, können also zwei Seitenkosinussätze und einen Sinussatz zum Einsatz bringen.

$$(D.2) \text{ gibt } \cos\left(\frac{\pi}{2} - H\right) = \cos(\text{LHA}) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \text{ oder}$$

$$\boxed{\sin(H) = \cos(\text{LHA}) \cos(\delta) \cos(\varphi) + \sin(\delta) \sin(\varphi)} \quad (3.5)$$

$$\text{und auch } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos(2\pi - a) \sin\left(\frac{\pi}{2} - H\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - H\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \text{ oder}$$

$$\boxed{\sin(\delta) = \cos(A) \cos(H) \cos(\varphi) + \sin(H) \sin(\varphi)} \quad (3.6)$$

$$(D.4) \text{ gibt } \frac{\sin(|\text{LHA}|)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - H\right)} = \frac{\sin(2\pi - a)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)} \text{ oder}$$

$$\boxed{\sin(\text{LHA}) \cos(\delta) = -\sin(A) \cos(H)} \quad (3.7)$$

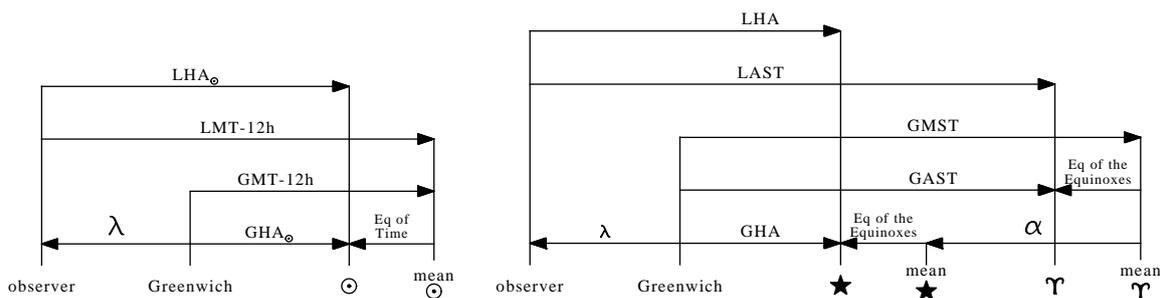


Abbildung 10: Beziehung zwischen Stundenwinkeln, Gestirnspositionen und Längengraden. In dieser Einführung vernachlässigen wir die kleine Korrektur “Equation of the Equinoxes” und setzen $LAST = LST$ und $GAST = GMST = GST$.

Als Alternative zu (3.7) gibt's noch den Tangenssatz (D.10)

$$\tan(2\pi - A) = \frac{\sin(|LHA|)}{\frac{\sin(\varphi)}{\tan(\frac{\pi}{2} - \delta)} - \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) \cos(LHA)} \quad \text{oder}$$

$$\tan(A) = \frac{\sin(LHA)}{\sin(\varphi) \cos(LHA) - \sin(\varphi) \tan(\delta)}$$

(3.8)

Er gestattet im Gegensatz zu (3.7) die Berechnung des Azimuts A ohne weitere Kenntnis der zweiten Koordinate H des Horizontalsystems.

Zu den Gleichungen ist folgendes zu bemerken: In Abb. 9 haben wir den Fall gezeichnet, dass LHA positiv ist, denn der Himmelskörper steht westlich des Beobachters und ist vor weniger als 12 Stunden über dem Meridian des Beobachters hinweggegangen. Die Folge ist, dass $2\pi - A$ statt A als Innenwinkel im Nautischen Dreieck auftaucht. Stünde der Himmelskörper im Osten, wäre LHA negativ (oder $> 12^h$), dafür gäb's A direkt als Innenwinkel. Dort wo die beiden Winkel A und LHA Argumente des Kosinus sind, spielt das keine Rolle, denn der ist symmetrisch und merkt den Vorzeichenunterschied gar nicht. Im Sinussatz (3.7) gab die Umwandlung von $\sin(2\pi - A)$ nach $\sin(A)$ aber gerade das Minuszeichen. Steht der Himmelskörper im Osten fällt das Minuszeichen also nicht an, dafür aber eines bei der Aufhebung der Betragsbildung des jetzt negativen Wertes von LHA. Ähnlich beim Tangenssatz (3.8): $\tan(2\pi - A) = -\tan(A)$ gibt wieder ein Minuszeichen, wenn der Himmelskörper im Westen steht, andernfalls kommt es vom $\sin(|LHA|) = -\sin(LHA)$ da jetzt $LHA < 0$. Das Minuszeichen haben wir benutzt, um den Nenner in (3.8) umzudrehen. Alle Gleichungen sind also in beiden Fällen gültig.

Bei Beobachtung eines Gestirns könnten im Prinzip die Höhe H über dem Horizont und der Azimutwinkel A gegen die Nordrichtung ostwärts erfasst werden. Die Höhe H lässt sich mit einem Sextanten besser als eine Bogenminute bestimmen. Der Azimut A ist auf einem Schiff aber kaum verlässlich zu messen, so dass eigentlich nur die Höhe H zur Positionsbestimmung zur Verfügung steht. Gleichung (3.5) ist also die wichtigste der oben aufgeführten.

Das Prinzip der Ortsbestimmung lässt sich anhand dieser Gleichung schon jetzt verraten. Gemessen werden H und die Uhrzeit, mit letzterer suchen wir uns aus einem Nautischen Jahrbuch oder berechnen GST und die Koordinaten α bzw. SHA und δ des Gestirns. (3.5) enthält dann nur noch die Beobachterkoordinaten λ und φ (ersterer steckt über Gl. 3.2 oder 3.4 in LHA) als Unbekannte. Da die eine Gleichung (3.5) nicht ausreicht, zwei Unbekannte zu bestimmen, lässt sich die Lösung zunächst nur auf eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, eine Höhengleiche, reduzieren. Praktisch wird diese dann durch eine Standlinie in Form einer lokale Tangente oder Sekante angenähert.

Bevor wir die Lösungsmöglichkeiten von (3.5) genauer besprechen, müssen wir erst einmal noch die Gleichungen (3.1) bis (3.4) präzisieren. Die Gleichungen sind in Abb. 10 noch einmal graphisch zusam-

mengefasst. Wir haben in den Gleichungen statt des Gleichheitszeichens zunächst ein \simeq gesetzt, denn die scheinbare Bewegungen von Sonne und Sternen sind ungleichmässig, so dass wir die Gleichungen noch um einige Korrekturen ergänzen müssen. In Abb. 10 sind sie mit “Equation of Time” für die Sonne und “Equation of the Equinoxes” für Sterne bezeichnet. Entsprechend wird eigentlich bei der Sternzeit GST zwischen GMST (mean) und GAST (apparent) unterschieden. Mit Bordmitteln sind wir jedoch bestenfalls in der Lage, die Zeit auf eine Sekunde genau zu bestimmen. In einer Sekunde sind Sonne und Sterne um etwa $15'' = 0.2'$ am Himmel weitergewandert. Dieser Winkel stellt somit die Ungenauigkeit dar, die wir uns bei der Bestimmung von Stern- und Sonnenposition erlauben können. Das wird dazu führen, dass wir die Korrektur “Equation of the Equinoxes” ganz vernachlässigen und auf die Unterscheidung zwischen GAST und GMST bei den Sternzeiten verzichten. Bei der Sonne ist die analoge Korrektur zwischen wahrer und mittlerer Sonne, die “Equation of Time”, nicht vernachlässigbar.

4 Zeit und Gestirnspositionen

Als erstes wollen wir etwas genauer als bisher den Zusammenhang zwischen unserer gesetzlichen Zeit UTC und der Stern- und Sonnenzeit und entsprechenden Stundenwinkeln herstellen. Im Anhang zeigen wir, wie der Stand der Sonne, von Planeten und Sternen, zumindest zu der für uns ausreichenden Genauigkeit selbst berechnet werden kann. Wem die Heimwerkerei nicht liegt, der kann die Positionen der Himmelskörper dem Nautischen Jahrbuch entnehmen. Mit dem Hintergrundwissen, dass wir erlangt haben, ist die Bedeutung der Einträge im Jahrbuch leicht zu verstehen.

4.1 Zeitsysteme

Für die Genauigkeit, mit der wir heute in vielen Fällen Zeitmessungen benötigen, reichen die schwankende Tages- oder schwer definierbare Jahreslänge nicht mehr aus. Die Basis unserer Zeitabgaben ist daher die mit Atomuhren gemessene Zeit TAI (Temps Atomic Internationaux). Sie definiert die Länge einer Sekunde (SI-Sekunde) durch eine festgelegte Anzahl von Schwingungen der Strahlung eines Hyperfeinstrukturübergangs des Cs Atoms.

Neben der gemessenen, offiziellen Zeit gibt es eine theoretische Zeit TT (Terrestrial Time, früher TDT, Terrestrial Dynamic Time, davor ET, Ephemeris Time). Sie wird für Vorrausberechnungen der Planetenbewegungen benutzt. Berechnete Ephemeriden werden daher manchmal in TT angegeben, und wir müssen gegebenenfalls die Uhrzeit entsprechend korrigieren.

Wenn unser Verständnis der Planetenbewegungen stimmt, dann muss sie in TAI-Zeit auf der Erde so beobachtet werden wie es in TT berechnet wurde. Auf diese Weise werden TT und TAI fortwährend miteinander verglichen. Bislang sind beide Zeiten synchron, allerdings mit einem konstanten Offset:

$$TT = TAI + 32^s.184 \quad (4.1)$$

Er besteht, seit TAI 1972 eingeführt wurde und damit ET als offizielle Zeit ablöste. Die Atomuhren waren schon seit den 50iger Jahren im Versuchsbetrieb und ihre Zeitanzeige sollte nicht verstellt werden. Daher wurde das gleiche gemacht, was wir auch an Bord mit unserem Chronometer machen: es wurde nicht die Chronometeranzeige verändert, sondern lediglich die “Chronometerberichtigung” notiert.

Um die Verwirrung klein zu halten, wurde die Definition der SI-Sekunde so gut wie möglich dem $1/86400$ tel der mittleren astronomische Sonnentageslänge angepasst. Ein offizieller Kalendertag wird dann pauschal durch 86400 SI-Sekunden definiert, ein Kalenderjahr durch die dem Gregorianischen Kalender entsprechende Anzahl von Tagen und Schalttagen und zusätzliche eventuelle Schaltsekunden. Parallel zum Kalenderdatum ist in der Astronomie eine fortlaufende Zählung der Tage (Julianische Tage) ohne Rücksicht auf Monat und Jahr in Gebrauch. Die Julianischen Tage beginnen jedoch wie die Stundenwinkel jeweils um 12 Uhr mittags: der 1. Januar 2007, 12^h0 ist z.B. der Julianische Tag 2454101^d0. In einigen Jahrbüchern sind die Ephemeriden als Funktion dieses Julianischen Tages angegeben. Pauschal

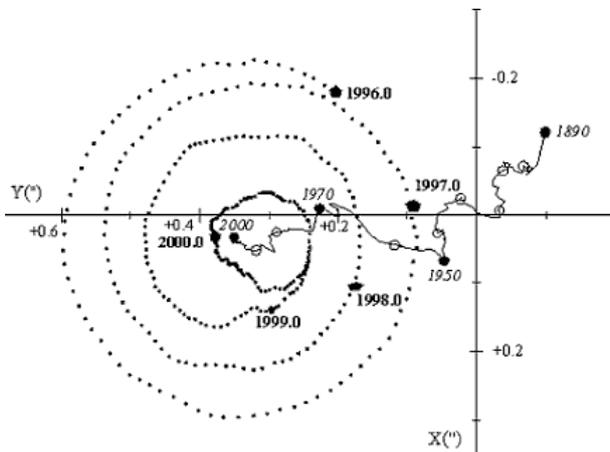


Abbildung 11: Bewegung der aktuellen Rotationsachse der Erde auf der Erdoberfläche. Die kreisförmige Bahn ist gepunktet für die Zeit von 1996 bis 2000 dargestellt und hat einen Durchmesser von etwa 20 m, die Umlaufperiode beträgt etwa 400 Tage (Chandler Periode). Dieser Kreisbewegung ist aber eine Drift überlagert. Die durchgezogene Linie stellt den Weg des Zentrums der Kreisbewegung seit 1890 dar.

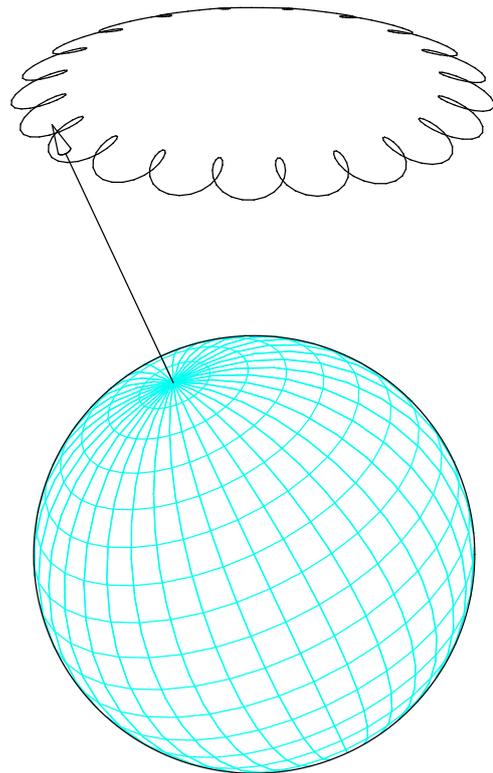


Abbildung 12: Illustration der Präzessions- und Nutationsbewegung der Erdachse. Der große Umlauf der Präzession dauert 26000 Jahre. Die “kleinen” Kringel den Nutation (hier übertrieben groß dargestellt, siehe Abb. 15) 18.6 Jahre und kürzer.

werden $365^{\text{d}}.25$ Julianische Tage zu einem Julianisches Jahr zusammengefasst. Es gibt aber keine Julianische Jahreszählung, und diese Zeitangaben dürfen nicht mit dem Julianischen Kalender verwechselt werden, der im 16. Jahrhundert durch den Gregorianischen Kalender abgelöst wurde.

Diese Zeitdefinition wäre soweit in Ordnung, würde sich nur die Erde daran halten. Aus verständlichen Gründen legen wir Wert darauf, dass die Zeitangaben sich auch irgendwie nach dem Sonnenstand richten. Das wird erschwert durch die ungleichmäßige Wanderung des Bildpunktes der Sonne auf der Erde. Der “regelmässige” Teil dieser Gangstörung der Sonnenuhr wird hervorgerufen durch die Ekzentrität der Erdbahn und die Neigung der Erdachse gegen die Ebene der Ekliptik. Ist die Erde im Perihel und der Sonne besonders nahe, wandert sie scheinbar schneller als im Aphel, dem sonnenfernsten Punkt ihrer Bahn. Wenn die Sonne den Frühlings- oder Herbstpunkt passiert (am 23. September bzw. 21. März), bewegt sie sich mit einem Winkel von $90^\circ - 23^\circ.5 = 66^\circ.5$ schräg gegen die Längengrade an und schneidet sie deshalb nicht so schnell wie an den Wendekreisen. Diese Störung ist aber noch recht gut vorhersagbar (Zeitgleichung) und wird in vielen Sonnenstandsmessungen gleich herausgerechnet. Die Messungen beziehen sich dann auf eine fiktive mittlere Sonne, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Längengrade passiert und somit eine Referenz für die Tageszeit darstellt.

Während die Orbitalbewegung der Erde noch einigermaßen verlässlich berechnet werden kann, so ist die Drehung der Erde um ihre eigene Achse ziemlich unzuverlässig. Dafür gibt es mehrere Gründe:

- Da die Erde abgeplattet ist, können Mond, Sonne und andere Planeten, wenn sie sich nicht gerade in der Äquatorebene der Erde befinden, auf die Erde ein Drehmoment ausüben. Das führt dann zur Präzession der Drehimpuls- und damit auch der Rotationsrichtung der Erde im Raum
- Drehimpuls- und Trägheitsachse der Erde stimmen nicht überein. Es kommt so zu Nutationsbewegungen der Rotationsachse bezogen auf den Fixsternenhimmel und auch gegenüber dem Erdkörper.
- Mond und Sonne rufen eine Gezeitendeformation des gesamten Erdkörpers hervor, ähnlich wie die Gezeiten der Ozeane, nur sehr viel kleiner. Durch die innere Reibung des Erdkörpers läuft die Gezeitenwelle hinter den Positionen der beiden Himmelskörper hinterher. Die Gravitationskräfte von Mond und Sonne auf diese Deformation bremsen die Erdrotation ab und beschleunigen dafür den Mond in seinem Umlauf um die Erde.
- Massenverlagerung auf der Erde führt zu Änderungen ihres Trägheitsmomentes und damit zu weiterer Änderung von Betrag und Richtung der Erdrotation.

In den Beobachtungen kann man die Ursachen der Richtungsänderungen der Rotationsachse nicht unterscheiden, daher nennen die Astronomen alle Richtungsänderungen der Rotationsachse im Raum Nutation, wenn ihre Periode 18.6 Jahre (Präzessionsperiode der Mondbahnebene) oder weniger beträgt. Alle langsameren Schwankungen werden lunisolare Präzession genannt. Die Wanderung der Rotationsachse auf dem Erdkörper heißt unabhängig von ihrer Ursache Polbewegung (Polar motion).

Die Polbewegungen der Erdachse (Abb. 11) sind zwar klein (ca. ± 10 m mit einer dominierende Periode von ~ 400 Tagen) können aber nicht so genau vorhergesagt werden, wie die Nutationsschwankungen und werden daher laufend vom International Earth Rotation Service (IERS) vermessen und in Bulletins bekannt gegeben.

Die Richtungsänderungen der Erdachse durch Nutation und Präzession (Abb. 12) bewirken eine entsprechende Schwankung der momentanen Äquatorebene, so dass deren Schnittgrade mit der Ekliptik nicht mehr raumfest ist. Das ist problematisch, da ja diese Schnittgrade die Richtung des aktuellen Frühlingspunktes festlegt, der wiederum die Länge $\alpha=0$ unseres Sternkoordinatensystems definiert. Für die Nutationsschwankungen kann diese Bewegung weitgehend vorausberechnet werden (Equation of the Equinoxes) und viele Beobachtungen werden durch eine entsprechende Korrektur gleich auf einen mittleren Frühlingspunkt ("mean equator and equinox of date") bezogen.

Die langsamere Präzessionsbewegung der Erdachse bewirkt eine stetige Wanderung des Frühlingspunktes entlang dem Äquator mit einer Umlaufperiode von ~ 26000 Jahren. Bei der Angabe der Koordinaten der Fixsterne ist es also unbedingt notwendig mit anzugeben, auf welchen mittleren Frühlingspunkt sich das Koordinatensystem bezieht. Dies geschieht mit einem Hinweis der Form z.B. "mean equinox of epoch J2000.0" in dem Sternkatalog. Er bedeutet, dass die Lage des Äquators und des mittleren Frühlingspunktes zum Julianischen Tag J2000., also dem 1. Jan 2000 12^h0^m0^s als Referenz genommen wurde. Sternkataloge ohne einen entsprechenden Hinweis sind ähnlich eingeschränkt brauchbar, wie Seekarten ohne Angabe des geodätisches Kartendatums oder der magnetische Mißweisung.

Die aktuelle astronomische Tageslänge schwankt dagegen wieder sehr erratisch im Bereich von Millisekunden und nimmt darüber hinaus, hauptsächlich durch die Gezeitenbremsung, um etwa 1.5 ms pro Jahrhundert ab. Die 86400 SI Sekunden des Julianischen Tages stimmten Mitte des 19. Jahrhunderts noch gut mit der mittleren Länge eines Sonnentages überein, heute sind die Tage im Mittel etwa 2 ms länger (Abb. 13). Die aktuellen Tageslängen sind nicht besser als einige Millisekunden vorhersagbar (vielleicht wäre das mal eine ausgefallene Entschuldigung für eine Verspätung), daher werden sie wie die Polbewegung von der IERS laufend gemessen und im Nachhinein veröffentlicht.

In der Vergangenheit wurden zur Messung der Tageslänge zwei Messmethoden verwendet. In dem einem Verfahren wird der Zeitpunkt des Meridiandurchgangs der mittleren Sonne in einer Reihe von Observatorien gemessen. Die Zeitdifferenz zwischen dem Transit in Greenwich zu dem Transit bei einem Observatorium mit der westlichen Länge λ legt dann für dieses Observatorium den Zeitpunkt $UT_0 = \lambda + 12^h$ fest. Die so bestimmte Zeit UT_0 benutzt die geographische Länge λ , die aber wegen der Polbewegung etwas schwankt. Eine entsprechende Korrektur von Größenordnung einiger Millisekunden überführt UT_0 in die Zeit UT_1 , die dann für die ganze Erde den Greenwich Stundenwinkel der mittleren Sonne angibt und ist mit identisch GMT, der lokalen Sonnenzeit in Greenwich (um Verwechslungen mit früheren

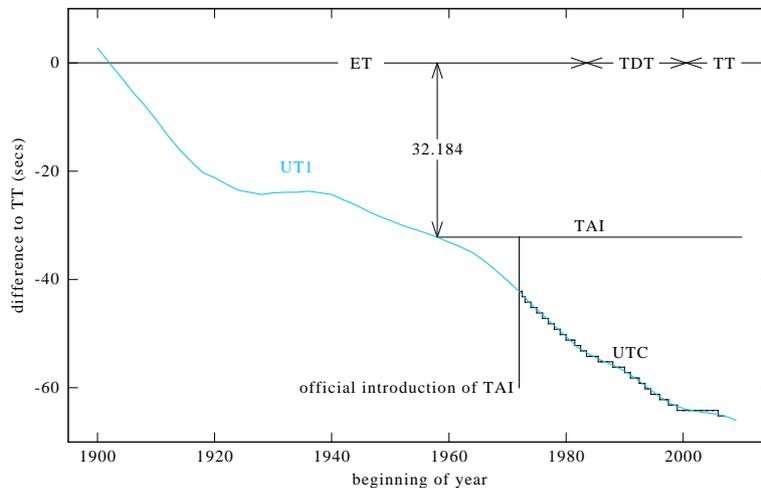
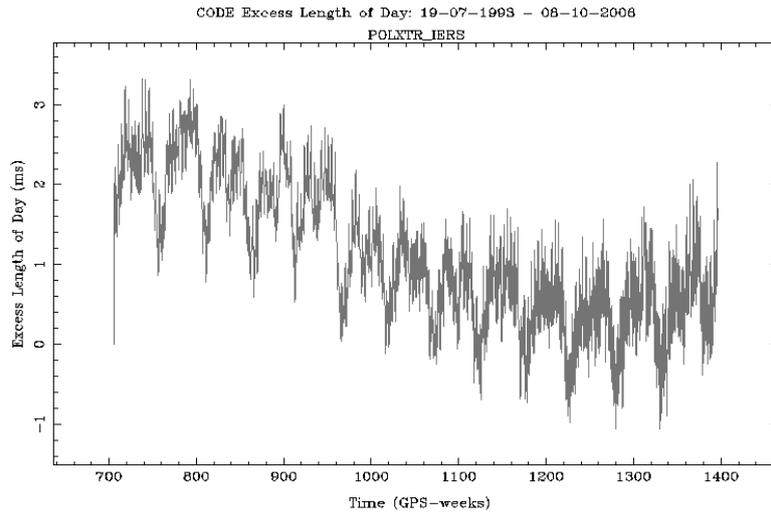


Abbildung 13: Tageslängenexzess, d.h. die Differenz der Tageslänge zu 86400 SI Sekunden (oben) und die damit verbundene Abnahme der Zeit UT1 (unten). Ein mittlerer Tageslängenexzess von 3 ms während eines Jahres führt zu einem Absinken von UT1 gegenüber TAI von ~ 1 s. Die Tageslänge kann seit dem Start der GPS Satelliten sehr genau vermessen werden und ist für die Jahre 1993 bis 2006 dargestellt. In den Sommermonaten dreht die Erde immer etwas schneller (Minima in der Tageslänge). Seit $\simeq 2000$ ist der Exzess fast null, und daher mußte in diesem Jahrtausend bisher nur 2005 ein Schaltsekunde in UTC eingefügt werden. UTC ist durch die stufige Kurve dargestellt, jede Stufe repräsentiert eine Schaltsekunde.

Definitionen zu vermeiden, wird GMT nicht mehr als Namen des Zeitstandards verwendet).

Präziser gemessen werden kann der Drehwinkel der Erde gegen den Fixsternenhimmel. Für jedes Observatorium legt der Meridiandurchgang des Frühlingspunktes die wahre lokale Sternzeit $LAST=0$ (Local apparent sidereal time) fest. Der Meridiandurchgang eines Sterns mit der Rektazension α_* ergibt entsprechend den Zeitpunkt der wahren lokalen Sternzeit $LAST=\alpha_*$ für dieses Observatorium. Da diese Messungen die geographische Länge des Observatoriums nicht benötigen, ist eine Korrektur der Polbewegung nicht notwendig. Statt dessen muss die allerdings viel besser berechenbare Nutationsschwankung der aktuellen Richtung des Frühlingspunktes korrigiert werden. Diese Korrektur ergibt dann die mittlere lokale Sternzeit LMST (local mean sidereal time, im Dt. mit t_{φ} bezeichnet). Nach Subtraktion der je-

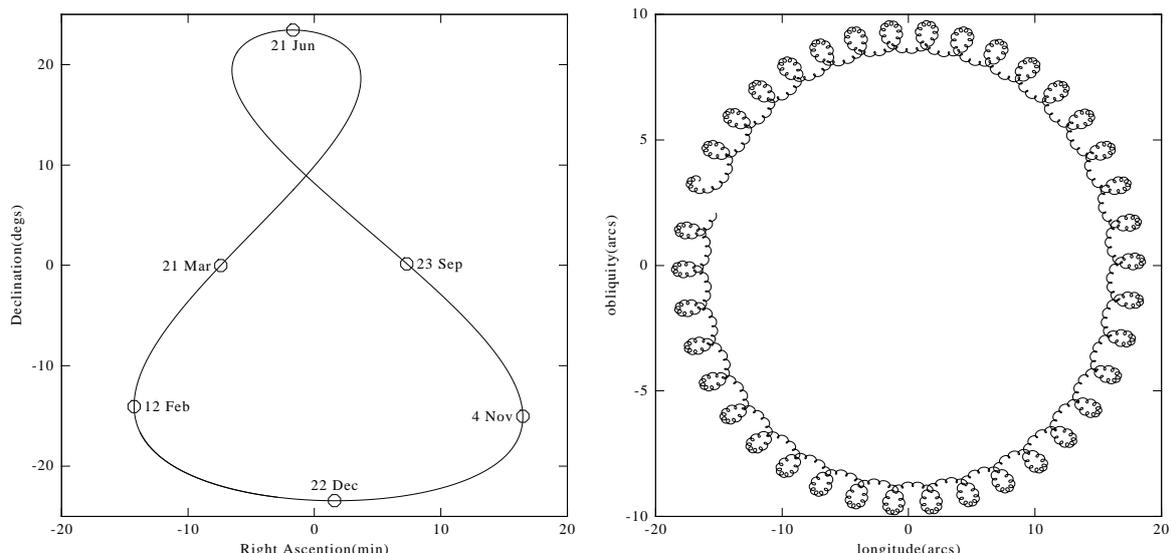


Abbildung 14: Differenz der Rektazension der wahren zur mittleren Sonne im Laufe eines Jahres (Abgetragen gegen die jeweilige Deklination der Sonne (Ordinate). Die Daten von Sommer- und Winteranfang (Sonnenwenden), Herbst- und Frühlingsanfang (Äquinoktien) gelten für 2007. Den größten Vorsprung vor der mittleren Sonne hat die wahre Sonne mit $16^m 25^s$ im November, im Februar eilt sie der mittleren Sonne mit $14^m 15^s$ am weitesten hinterher.

weiligen geographischen Länge der Stationen von LMST (siehe Gl. 3.2) wird so die weltweit einheitliche GMST (Greenwich mean sidereal time, im Dt. Gr_T) ermittelt.

Damit haben wir zwei gemessene Zeiten, UT1 und GMST, die eigentlich Winkel sind. UT1 gibt den Winkel der mittleren Sonne gegen den Greenwich Meridian an, GMST die Winkel des Greenwich Meridians gegen den mittleren Frühlingspunkt. Beide beschreiben also die Rotationsphase der Erde. Sie enthalten noch alle Schwankungen des Betrages der Erdrotation, unterscheiden sich aber untereinander nur noch durch die Bewegung der mittleren Sonne vor dem Fixsternenhimmel und durch die langsame Präzessionsdrift des Frühlingspunktes. Zwischen den beiden Zeiten sollte also ein fester Zusammenhang bestehen und der ist ([1], vereinfacht, gilt streng genommen für GMST)

$$\begin{aligned}
 \text{GST} &= 24110^s.55 + 86401^s.84813 \frac{D}{365.25} + 1^s.00273790935 S \\
 &= 6^h 41^m 50^s.55 + 24^h 00^m 01^s.84813 \frac{D}{365.25} + 1^s.00273790935 S
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

wobei

$$D = 2555.5 + d, \quad S = 60(60h + m) + s$$

Hier sind D die Julianischer Tage seit J2000, also dem 1. Jan 2000, $12^h 0$. Dazu zählen wir die Tage d seit dem 31. Dezember 2006 (angefangen mit $d=1$ für den 1. Januar 2007). S sind die Sekunden des Tages berechnet aus den Stunden h , Minuten m und und sekunden s der Tageszeit nach UT1. Die beiden ersten Terme in (4.2) geben GST jeweils um 0 UT1 eines jeden Tages an, der letzte Term das Anwachsen der

Sternzeit im Laufe eines Tages. Da GST eigentlich ein Winkel ist, können (und sollten) wir getrost ein Vielfaches von 86400^s bzw. 24^h abziehen bis $GST \in [0^s, 86399^s]$ bzw. $[0^h, 24^h]$.

Neben der Tageslänge muss auch die Jahreslänge nachgemessen werden. Sie ist durch die Umlaufperiode der Erde um die Sonne bestimmt und sehr viel verlässlicher als die Tageslänge. Bevor man aber die Jahreslänge messen kann, muss man zunächst genau definieren, wann ein Jahr anfängt und wann es endet. Je nach Definition kommen dann verschiedene Jahreslängen heraus. Die beiden wichtigsten sind, ausgedrückt in Julianischen Tagen ([1], für 2007 vorausberechnet):

$$\begin{aligned} \text{Tropisches Jahr (Frühlingspunkt - Frühlingspunkt)} & D_{\text{trop}} = 365^d 242190 \\ \text{Sternjahr (Fixstern - Fixstern)} & D_{\text{star}} = 365^d 256363 \end{aligned}$$

Die Differenz beträgt etwa 20^m , die relative Differenz entspricht $1/26000$ tel, also genau der Präzessionsdrift des Frühlingspunktes.

Das Sternjahr stimmt bis auf ca. 9^m mit dem Julianischen Jahr von $365^d 25$ Tagen überein und beschreibt damit einigermaßen die eigentliche Umlaufperiode der Erde um die Sonne im raumfesten System der Fixsterne. Die Definition der Julianischen Jahreslänge ist aber nicht im Einklang mit unserem Gregorianischen Kalenderjahr. Danach hat jedes Jahr mit durch 4 teilbarer Jahreszahl einen Schalttag, außer wenn das Jahr auf ein Jahrhundertjahr fällt, das nicht durch 400 teilbar ist. Das gibt im Mittel $365 + 1/4 - 1/100 + 1/400 = 365^d 2425$ und das stimmt nun ganz gut mit dem tropischen Jahr überein, das die Äquatorneigung zur Sonne und damit die Jahreszeiten synchron erhält. Genau dies war der Grund für die Kalenderreform von Papst Gregor im 16. Jahrhundert: Er wollte verhindern, dass seine Nachfolger irgendwann beim Osterfest kalte Füße kriegen.

Nun können wir die Koeffizienten in (4.2) besser verstehen: Da der Sterntag sich am Frühlingspunkt orientiert, dauert es genau ein tropisches Jahr, bis die Sternzeit einen Julianischen Tag gegenüber der UT1 Zeit hinzugewonnen hat. Der Koeffizient von D in (4.2) entspricht also den Sekunden eines Julianischen Jahres dividiert durch D_{trop} . So ergibt sich ein Vorsprung von genau 86400 Sekunden wenn wir $D = D_{\text{trop}}$ und $S = 0$ einsetzen. Setzen wir dagegen die Tage D_{star} eines Fixsternjahres ein, so ergibt sich ein Vorsprung für die Sternzeit von 86403.35 Sekunden. Die 3 Sekunden, die diese Zeitdifferenz über den Julianischen Tag hinausgeht, entspricht ziemlich genau dem Betrag der Präzessionsdrift des Frühlingspunktes in einem Jahr (siehe Gl. G.2). Pro Julianischem Tag gewinnt die Sternzeit also $86400/D_{\text{trop}}$ Sekunden. Der Koeffizient von S , das Verhältnis von Stern- zu Sonnentag, beträgt somit $1 + 1/D_{\text{trop}}$.

Unsere gesetzliche Zeit UTC ist nun ein Kompromiss zwischen den konstanten Zeitmaßen TAI und TT und der variablen Zeit UT1 (Abb. 13). Im Prinzip läuft UTC synchron mit TAI. Damit sie aber zumindest annähernd den Sonnenstand wiedergibt, wird zum 30. Juni oder 31. Dezember eine Schaltsekunde zur UTC Zeit hinzugefügt, wenn absehbar ist, dass die Abweichung $|\text{UTC}-\text{UT1}|$ den Wert $0^s.9$ im nächsten halben Jahr übersteigt.

Damit wird der Unterschied zwischen UTC und UT1 bzw. GMT kleiner als 1 Sekunde gehalten, der Abstand zwischen UTC und TAI aber wird immer größer, da ja die Erdrotation langsam abnimmt. Seit Einführung der TAI Zeit 1976 sind inzwischen 32 Schaltsekunden eingefügt worden (Abb. 13).

Für unsere Ortsbestimmung können wir also auf eine Unterscheidung zwischen UT1, GMT und UTC verzichten und immer die gesetzliche UTC Zeit einsetzen. Die Nutationsschwankungen (Abb. 15) liegen in der Größenordnung von etwa $20''$ und damit gerade an der Grenze unserer Meßgenauigkeit. Wir wollen also nicht zwischen LMST und LAST unterscheiden und nennen die lokale Sternzeit weiterhin LST. (3.2) kann somit für unsere Berechnungen unverändert in der Form

$$\text{LHA}_\star = \text{GHA}_\star + \lambda = \text{GST} + \lambda - \alpha_\star = \text{GST} + \lambda + \text{SHA}_\star \quad (4.3)$$

übernommen werden, wobei GST nach (4.2) berechnet oder einer Tafel entnommen wird. Es muss dabei aber berücksichtigt werden, dass sich die Koordinaten der Sterne durch die Präzessionsdrift langsam verändern. In Anhang G geben wir eine einfache Formel von [5] wieder, mit der die Koordinaten von der Katalogreferenzzeit auf die Beobachtungszeit umgerechnet werden können.

Für die Positionbestimmung durch Sonnenbeobachtung müssen wir den Stundenwinkel der wahren Sonne kennen, UT1 bzw. GMT gibt ja nur den Winkel der mittleren Sonne wieder. Wir müssen (3.1)

dazu um eine Korrektur ergänzen, der die Gangstörungen der wahren Sonne berücksichtigt

$$\text{GHA}_{\odot} = \text{GMT} - 12^{\text{h}} + \Delta\alpha_{\text{EqT}} = \text{UT1} - 12^{\text{h}} + \Delta\alpha_{\text{EqT}} \quad (4.4)$$

Die Korrektur $\Delta\alpha_{\text{EqT}}$ heißt Zeitgleichung (Equation of Time) und nimmt im Laufe eines Jahres Werte zwischen $\pm 15^{\text{m}}$ an (Abb. 14). Sie ist also für uns von Bedeutung und kann zusammen mit der Deklination der Sonne mit den Formeln (E.15) im Anhang E in der für uns ausreichenden Genauigkeit berechnet werden. Der wesentliche Beitrag zu $\Delta\alpha_{\text{EqT}}$ kommt von der Gangstörung der Sonne durch die Exzentrizität der Erdbahn und ihrer Neigung gegen die Ekliptik. Ein kleinerer Anteil stammt von den Nutationskorrekturen, die wir aber konsequenterweise im Anhang E nicht berücksichtigen.

Der Stundenwinkel der Sonne ergibt sich an jedem anderen Ort mit

$$\text{LHA}_{\odot} = \text{GHA}_{\odot} + \lambda = \text{UT1} - 12^{\text{h}} + \Delta\alpha_{\text{EqT}} + \lambda \quad (4.5)$$

wobei wir entweder GHA_{\odot} aus einer Tafel entnehmen oder $\Delta\alpha_{\text{EqT}}$ nach (E.15) berechnen.

Zusammengefasst:

Für Sterne suchen wir
1) die Katalogkoordinaten von Rektazension $\alpha_{\star_{\text{Katalog}}}$ oder Sternwinkel $\text{SHA}_{\star_{\text{Katalog}}}$ und Deklination $\delta_{\star_{\text{Katalog}}}$ aus einem Sternkatalog,
2) und korrigieren ihre Koordinaten auf den aktuellen Meßzeitpunkt, wenn das Katalogdatum weiter als einige Monate zurück liegt, entsprechend (G.2).
3) Wir berechnen danach GST aus Meßdatum und Zeit nach (4.2) wobei $\text{UTC} = \text{UT1}$
4) und ersetzen LHA in (3.5) durch (4.3)
Für die Sonne:
1) berechnen GHA nach (4.4) und (E.15),
2) schließlich ersetzen wir nach (4.3) $\text{LHA} = \text{GHA} + \lambda$ in (3.5)
In beiden Fällen sind jetzt λ und φ die einzigen Unbekannten in (3.5)

Nach dieser Prozedur erhalten wir die Stundenwinkel bestenfalls auf $0'.2$ genau. Jede weitere Verbesserung der Genauigkeit stößt an mehrfache Grenzen: Wir müßten die Nutationskorrektur ernst nehmen und genauere Präzessionskorrekturen benutzen, was einigen Mehraufwand beim Errechnen der Gestirnspositionen erfordert. Wir müssten den Sextanten genauer als $0'.2$ ablesen und die Uhrzeit besser als 1 Sekunde. Selbst wenn uns das gelänge, wäre uns noch nicht viel geholfen, denn wir dürften den Unterschied zwischen UTC und UT1, der bis zu $0^{\text{s}}.9$ betragen kann, nicht mehr vernachlässigen.

In der Praxis werden wir eher damit zu kämpfen haben, unseren Bordchronometer wenigstens UT1-genau zu trimmen. Ideal zur Kontrolle des Chronometers sind Zeitzeichensender, die vorwiegend auf Langwelle unterhalb von 100 kHz, einige auch auf Kurzwelle, empfangen werden können. Hier eine Liste (wahrscheinlich unvollständig):

Station	Betreiber	Sender	Frequenz
CHU		Ottawa, CN	3.330, 7.335, 14.670 MHz
DCF77	PTB	Mainflingen, D	77.5 kHz
MSF	NPL	Teddington, GB	60.5 kHz
RWM		Moskau, RUS	4.996, 9.996, 14.996 MHz
WWV	NBS	Fort Collins, Col., USA	2.5, 5.0, 10.0, 15.0, 20.0 MHz
WWVH	NBS	Kekaha, Haw., USA	2.5, 5.0, 10.0, 15.0, 20.0 MHz
YVTO		Caracas, VEN	5 MHz

Die "klassische" Methode ist die Umkehrung des Navigationsproblems: Wir messen einen Gestirnshöhe H auf bekannter Position (λ, φ), berechnen den Stundenwinkel nach (3.5)

$$\cos(\text{LHA}) = \frac{\sin(H) - \sin(\delta) \sin(\varphi)}{\cos(\delta) \cos(\varphi)} \quad (4.6)$$

Daraus nach (4.3) für Sterne die Sternzeit GST, oder für die Sonne und Planeten den Greenwich Stundenwinkel GHA. Aus beiden können wir die UT-Zeit berechnen oder aber im Nautischen Jahrbuch nachschlagen. Dazu gibt es ein Berechnungsbogen im Anhang. Um eine gute Genauigkeit zu erzielen, sollte das Gestirn zum Messzeitpunkt schnell steigen oder fallen. In der Nähe der Kulmination oder bei einem Standort nahe den Polen ist die Methode offensichtlich sehr ungenau.

Leider kann diese Methode nicht weiter ausgebaut werden. Kennen wir unseren Standort nicht, so könnte man auf die Idee kommen, über die Höhenmessungen zweier Gestirne zwei Stundenwinkel zu bestimmen und die Auflösung ihrer "Bewegungsgleichungen" zur Berechnung der Zeit zu nutzen. Da Die Stundenwinkel aller Gestirne sich fast gleich mit $\sim 15^\circ/1^h$ vergrößert, ist die Lösung dieses Problems schlecht konditioniert, ähnlich einer Kreuzpeilung an zwei Objekten, die dicht beieinander stehen. Die auf diese Weise berechnete Zeit ist daher sehr fehleranfällig.

Nach der Überprüfung des Chronometers stellt man ihn tunlichst nicht jedesmal nach, sonder greift so wenig wie möglich in seinen Gang ein. Statt dessen wird lediglich die Differenz des Chronometerstands zum Zeitsignal notiert. Bei späteren Messungen wird die abgelesene Zeit dann um den Wert dieser Standberichtigung korrigiert.

Da der Chronometer ein wichtiges aber empfindliches Gerät ist, kann er auch nicht mit an Deck genommen werden, wenn die Gestirnhöhe gemessen wird. Hier ist eine Stoppuhr hilfreich. Sie wird zur vollen Minute des Chronometers gestartet und mit dem Sextanten an Deck genommen. Im Moment der Messung wird sie gestoppt. Einige teure Sextanten haben eine Stoppuhr gleich eingebaut, und man kann sie während des Bestecknehmens leicht bedienen. Anschließend werden der Stand des Chronometers beim Starten der Stoppuhr, die Gangkorrektur des Chronometers und die Stoppuhrsekunden zur UT1 Zeit der Messung aufaddiert.

In den Prüfungsaufgaben wird häufig der Chronometerstand etwas verzwickelt angegeben: zwar in UT1 (und einer zusätzlichen Gangkorrektur), aber die Stunden werden nur in dem Bereich 0 bis 12 gezählt. Dazu wird die Zonenzeit T_{ZZ} in Stunden von 0 bis 24 und die ungefähre Länge $\tilde{\lambda}$ genannt. Mit diesen Angaben erhalten wir eine grobe Zeit UT1 durch $T_{ZZ} - \tilde{\lambda}/15^\circ$. Diese Information nutzen wir dann, um zu entscheiden, ob der Chronometer eine Vor- oder Nachmittagszeit anzeigt.

4.2 Nautischer Almanach und BSH Jahrbuch

Wer die Formeln (4.2) und (E.15) im Anhang E nicht benutzen möchte, kann die Werte auch im Nautischen Almanach oder dem Jahrbuch des BSH nachschlagen, wo sie stundenweise tabelliert sind. Natürlich muss man immer das aktuelle Jahrbuch dabei haben (daher der Name), das Buch vom Vorjahr kann nur noch als Buchstütze dienen.

Um so interessanter sind daher Programme und Internetdienste, die Jahrbuchauszüge für gewünschte Zeiträume ausdrucken. Man muss sich nicht kiloweise mit Papier belasten und kann gezielt die Daten zusammenstellen, die man glaubt, brauchen zu können (hier aber lieber etwas großzügiger sein, nicht dass der entscheidende Tag hinterher fehlt). Ein weiterer Vorteil, wenn man die Nautischen Jahrbuchseiten selbst produziert, ist die Möglichkeit, die Stundenwinkel und Deklinationen in einer selbstgewählten Einheit ausgeben zu können. Wählt man z.B. Dezimalgrade oder Bogenmaß, so entfällt das lästige Umformen zwischen Minuten, Grad, Stunden und Bogenminuten. Das Interpolieren wird einfacher und die Zahlen können direkt im Taschenrechner verwendet werden. Unter den Literaturhinweisen sind auch einige frei kopierbare Ephemeridenprogramme aufgelistet. Sie haben den Nachteil, dass sie für unsere Zwecke viel zu genau sind (aber besser als umgekehrt). Sie lassen sich aber mit wenig Aufwand umschreiben, so dass sie den gewünschten Jahrbuchausdruck erzeugen.

Als Beispiel für den Auszug eines Nautischen Almanachs zeigen wir hier das Produkt der Webseite <http://www.tecepe.com.br/nav/TheOnlineNauticalAlmanac.htm> von der man jeweils drei Tage des Almanachs (frisch gerechnet) herunterladen kann.

13		12	15.7	S20	08.0		353	07.4	8.7	S17	44.6	13.7	59.4		Kaus Austr.	83	50.7	S34	23.0	
14		27	15.5	S20	07.5		7	35.2	8.8	S17	30.7	13.8	59.4		Kochab	137	19.6	N74	07.1	
15		42	15.3	S20	06.9		22	03.0	8.9	S17	16.8	13.9	59.4		Markab	13	43.5	N15	14.6	
16		57	15.1	S20	06.4		36	31.0	8.9	S17	02.8	14.0	59.5		Menkar	314	20.1	N	4	07.1
17		72	14.9	S20	05.9		50	59.0	9.0	S16	48.6	14.2	59.5							
															Menkent	148	13.5	S36	24.3	
18		87	14.8	S20	05.3		65	27.1	9.1	S16	34.4	14.3	59.5		Miaplacidus	221	40.2	S69	44.6	
19		102	14.6	S20	04.8		79	55.2	9.2	S16	20.0	14.4	59.5		Mirfak	308	47.4	N49	53.5	
20		117	14.4	S20	04.2		94	23.5	9.2	S16	05.5	14.5	59.5		Nunki	76	04.7	S26	17.4	
21		132	14.2	S20	03.7		108	51.8	9.3	S15	51.0	14.5	59.5		Peacock	53	27.3	S56	42.9	
22		147	14.0	S20	03.1		123	20.1	9.4	S15	36.4	14.6	59.5							
23		162	13.8	S20	02.6		137	48.6	9.4	S15	21.6	14.7	59.5		Polaris	320	54.9	N89	17.0	

		S.D.	16.3	d	0.5		S.D.	16.1	16.2	16.3										

Die Benutzung der Tafel ist offensichtlich: für Sonne, Mond und Planeten gibt's die Stundenwinkel GHA und Deklination δ stundenweise für jeden Tag. Das Vorzeichen der Deklination ist mit N für + und S für – gekennzeichnet. Für den mittleren Frühlingspunkt (hier Aries genannt) ist nur der Stundenwinkel, also eigentlich die Sternzeit GST, aufgeführt, per Definition ist die Deklination des Frühlingspunktes immer null.

Den Stunden- und Deklinationswinkel für die Tageszeit $h^h m^m s^s$ erhalten wir durch Interpolation zwischen den Stundenwerten. Zunächst lesen wir den Wert des jeweiligen Winkels zum Beginn der aktuellen Stunde, also um h UT ab. Dann errechnen wir die Winkeldifferenz $dGHA/dt$ bzw. $d\delta/dt$ zur nächsten Stunde $h + 1$ und multiplizieren sie mit dem Stundenbruchteil $\Delta t = (m + s/60)/60$. Um diese Korrektur muss zu der abgelesenen Wert von GHA bzw. δ zur Stunde h vergrößert werden.

Um die Interpolation zu erleichtern, sind die Stundendifferenzen schon im Almanach und im Jahrbuch vermerkt. Für die Deklination sind das die unter **d** aufgeführten Werte. Für die Stundenwinkel von Planeten und Mond stehen diese Differenzen unter **v**, wobei hier jedoch eine konstante mittlere Differenz schon abgezogen ist. Im BSH Jahrbuch heißen **d** und **v** gleichermaßen **Unt** (Unterschied). Für Sonne und Frühlingspunkt sind keine Angaben **v** gemacht. Die Sonne wandert ja ziemlich konstant mit 15° pro Stunde (die kleinen Geschwindigkeitsschwankungen der wahren verglichen mit der mittleren Sonne können wir über eine Stunde gut vernachlässigen). Für den Frühlingspunkt ist die Längenwanderung pro Stunde für das ganze Jahr ebenfalls konstant $15^\circ \times 1.002738 = 15^\circ 0411 = 15^\circ 02' 464$. Die vollständigen Differenzen $dGHA/dt$ des Stundenwinkels betragen für die unterschiedlichen Himmelskörper

- $15^\circ 00' 0/1^h$ für die Sonne,
- $15^\circ 02' 5/1^h$ für den Frühlingspunkt,
- $15^\circ 00' 0/1^h + v$ für die Planeten,
- $14^\circ 19' 0/1^h + v$ für den Mond.

Im Almanach sind **d** und **v** (bzw. **Unt** im Jahrbuch) jeweils in der Einheit Bogenminuten pro Stunde angegeben. Für die Berechnung des Korrekturwertes $\Delta GHA = dGHA/dt \Delta t$ multiplizieren wir sowohl den Grad- als auch die Minutenwert von $dGHA/dt$ mit Δt , den resultierenden Gradbruchteil multiplizieren wir mit 60 und addieren ihn zu den Minuten von ΔGHA . Die Deklinationsinterpolation $\Delta \delta = d\Delta t$ ist viel kleiner und sie berechnen wir gleich in Minuten, in denen **d** ja auch passend angegeben ist.

Die Differenzen **d** und **v** verändern sich im Laufe eines Tages nur wenig, so dass es genügt, sie als Tageswerte am unteren Ende der Spalte des betreffenden Gestirns aufzuführen. Eine Ausnahme ist der Mond. Für ihn sind die stündlichen Differenzen in GHA und δ über einen Tag so variabel, dass sie nicht in einem Tageswert zusammengefasst werden können, sondern wie die Winkel selbst stundenweise in einer eigenen Spalte aufgelistet sind.

Wer den Taschenrechner überhaupt nicht bemühen möchte, der kann die Korrekturwerte ΔGHA und $\Delta \delta$ in Interpolationstabellen ("Increments and Corrections" im Nautical Almanach auf gelben Seiten, "Schalttafeln" im BSH Jahrbuch) nachschlagen. Für die Tageszeit $h^h m^m s^s$ finden wir alles, was wir brauchen, auf der Schalttafelseite zur Minute m . Das zum Stundenwinkel GHA zunächst zu addierende "increment" (Zuwachs im BSH Jahrbuch) lesen wir für Sonne und Planeten, Frühlingspunkt und Mond

in getrennten Tabellen unter der Sekunde s ab. Dieser Anteil der Interpolation entspricht der konstanten mittleren Differenz der Stundenwerte von GHA. Der Interpolationswert des kleineren, variablen Anteils der Differenzen v von GHA (falls vorhanden) und d von δ (bzw. von **Unt** im BSH Jahrbuch) kann unter dem Betrag dieses Anteils in einer weiteren Tabelle als “**v or d correction**” im Almanach bzw. als Verbesserung **Vb** im Jahrbuch abgelesen werden. Hier wird also lediglich die Anzahl der Minuten m zur Interpolation zwischen den vollen Stunden berücksichtigt. Natürlich müssen die Vorzeichen von v und d bzw. **Unt** auf die “**v or d correction**” bzw auf **Vb** übertragen werden.

Als eigene Spalte gibt es täglich eine Liste der hellsten Fixsterne mit ihren Sternkoordinaten (ich nehme an, die Angaben sind sinnvollerweise immer bezogen auf den “mean equator and equinox of date”). Hier gibt es keine Interpolation, denn die Winkel sind einigermaßen konstant. Im Laufe einiger Wochen machen sich aber Präzession und Nutation bemerkbar, daher sind die Sternkoordinaten ebenfalls im Abstand von einigen Tagen aufgeführt. Den Stundenwinkel GHA eines Sterns erhalten wir, wie besprochen, indem wir zum angegebenen Sternwinkel SHA den Stundenwinkel des Frühlingspunktes, also die Sternzeit GST, hinzuaddieren.

Als weitere nützliche Einträge auf den Hauptseiten des Nautischen Almanachs und des Jahrbuchs sind die sichtbaren Radien von Sonne und Mond unter **S.D.** (semi-diameter) im Almanach bzw. unter **r** im Jahrbuch (jedoch nur für die Sonne) angegeben. Für den Mond stehen im Nautischen Almanach gleich drei Werte am unteren Ende der Spalte, die jeweils für 4, 12 und 20 UT gelten. Da der Mond die Erde in 27.3 Tagen auf einer exzentrischen Bahn umläuft (der Abstand schwankt zwischen 360 000 und 410 000 km) verändert sich der sichtbare Monddurchmesser deutlich schon innerhalb eines Tages.

Mit dem Abstand eines Himmelskörpers von der Erde hängt eng die horizontale Parallaxe **HP** zusammen (besprechen wir in Kapitel 7.3). Für den Mond ist die horizontale Parallaxe **HP** wegen ihrer Variabilität im Almanach stundenweise aufgeführt, im Jahrbuch gibt es drei Werte für 4, 12 und 20 UT am unteren Ende der Mondtabelle. Da der Mond der Himmelskörper mit dem kleinsten Abstand von der Erde ist, ist die Parallaxe beim Mond bedeutender als bei der Sonne und den Planeten. Im Jahrbuch des BSH findet man einen Tageswert für die Horizontalparallaxe auch für die Planeten. Er ist aber bestenfalls bei unseren nächsten Nachbarn, Mars und Venus, von Bedeutung und übersteigt selten 0.3 . Der Mondradius kann im Jahrbuch in den Beschickungstabellen als Funktion der Horizontalparallaxe nachgesehen werden.

Im BSH Jahrbuch gibt es noch zwei weitere Einträge: **T** und bei den Planeten **Gr** am unteren Ende der jeweiligen Spalte. Hier gibt **T** die Transitzeit des Himmelskörpers in Greenwich an und **Gr** steht für die Helligkeit des Himmelskörpers. Der Zahlenwert **Gr** bezeichnet die scheinbare (von der Erde aus gesehene) Helligkeit des Planeten, Astronomen nennen sie die Magnitude m . Aus der Magnitude kann die physikalische gemessene optische Helligkeit I des Himmelskörpers nach $I = I_0 10^{-0.4m}$ berechnet werden. Die Standardhelligkeit beträgt dabei $I_0 = 25 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$ und ist etwa die Helligkeit des Sterns Wega (α Lyrae). Zum Vergleich: die Solarkonstante beträgt $I_\odot = 1.3 \text{ kW/m}^2$. Ihre Magnitude ist im Mittel -26.8 , die des Mondes -12.5 . Wichtig: durch das Minuszeichen in der Definition der Magnitude haben Himmelskörper, die heller als I_0 sind, eine negative Magnitude, lichtschwächere eine positive (siehe auch die Tabelle der hellsten Sterne in Anhang F). Für Planeten schwankt die sichtbare Helligkeit, da der Abstand zur Erde nicht konstant ist.

5 Retardation, Aberration und jährliche Parallaxe

Haben wir die geometrische Position eines Himmelskörpers in Bezug zur Erde berechnet oder auch einem Sternkatalog entnommen, so müssen wir noch einige Korrekturen an die Rektazension und Deklination anbringen, um die beobachtbare Position zu erhalten.

5.1 Jährliche Parallaxe

Da die Erde sich auf einer Bahn um die Sonne bewegt, werden nicht allzu ferne Sterne im Laufe des Jahres aus etwas verschiedenen Richtungen gesehen. Dieser Effekt wird bei Sternen in Form kleiner

Korrekturen an den Sternort des Kataloges berücksichtigt. Andererseits wird genau dieser Effekt genutzt, um die Entfernung von Sternen in unserer Nachbarschaft zu ermitteln. Die Entfernung 1 parsec ist der Abstand von der Sonne, der zu einer Parallaxeschwankung der Sternposition von einer Bogensekunde führt. Die helleren Sterne in unserer Nähe sind (Ort J2000.0)

Name	RA	Dec	Entf	Jährl. Parallaxe
α Centauri	14 ^h 39 ^m 6	-60°50'	4.34 Lj	0.''751
Sirius	6 ^h 45 ^m 1	-16°42'	8.69 Lj	0.''375
Prokyron	7 ^h 39 ^m 3	5°14'	11.36 Lj	0.''287

Alle haben eine jährliche Parallaxe weit unterhalb unsere Messgenauigkeit.

Anders sieht es bei Mond und Planeten aus. Hier schwankt die Richtung, in der wir den Himmelskörper sehen so erheblich (natürlich auch aufgrund der Eigenbewegung von Mond und Planeten selber), dass kleine Korrekturen nicht mehr ausreichen. Wir können die Planetenbahnen mit etwas Aufwand (und geringer Genauigkeit, für uns aber ausreichend) selbst berechnen und die geometrische Richtung, in der wir einen Planeten zu gegebener Zeit sehen sollten, aus dem Differenzvektor $\mathbf{r}_{\text{geom}} = \mathbf{r}_{\text{planet}} - \mathbf{r}_{\delta}$ zwischen der Position des Planeten und der Erde bestimmen. Für den Mond ist die Berechnung schon aufwendiger, seine Bahn ist sozusagen eine einzige Bahnstörung und selbst eine genäherte Bahn mit mässiger Genauigkeit ist mit dem Taschenrechner nicht mehr zu bewältigen.

5.2 Retardation und Aberration

Die Laufzeit des Lichts von einem Planeten zur Erde hat auch eine Auswirkung auf die Richtung, in der wir die Planeten sehen. Auch wenn sie im Vergleich zu den Sternen dicht in der Nähe der Erde kreisen, so bewegen sie sich aber verhältnismäßig schnell durch den Fixsternenhimmel. Die endliche Laufzeit des Lichtes von einigen Minuten bewirkt, dass wir einen Planeten nicht dort sehen, wo er sich gerade aufhält, sondern wir sehen seine Position zu dem Zeitpunkt, als er das Licht emittierte, das wir gerade empfangen.

Ist \mathbf{r} der geometrische Vektor von der Erde zum Planeten, so entspricht seine Richtung dem geometrischen Planetenort im Sternensystem. Das Licht braucht für die Strecke $|\mathbf{r}|$ die Zeit $\Delta t = |\mathbf{r}|/c$ wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Z.B. für $|\mathbf{r}| = 1$ AU (mittlerer Abstand Sonne-Erde) kommen für Δt etwa 8 Minuten heraus. Ist $\mathbf{v}_{\text{planet}}$ die Bahngeschwindigkeit des Planeten, so sehen wir statt der geometrischen die retardierte Position, die der Planet um die Zeit Δt früher innehatte. Ihre Richtung folgt somit aus

$$\mathbf{r}_{\text{retarded}} = \mathbf{r}_{\text{geom}} - \mathbf{v}_{\text{planet}} \Delta t = \mathbf{r}_{\text{geom}} - \frac{\mathbf{v}_{\text{planet}}}{c} |\mathbf{r}| \quad \text{oder} \quad \mathbf{e}_{\text{retarded}} \simeq \mathbf{e}_{\text{geom}} - \frac{\mathbf{v}_{\text{planet}}}{c} \quad (5.1)$$

wobei $\mathbf{e} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ der jeweilige Einheitsvektor ist, der nur noch die Richtung angibt.

Ein damit verwandter Effekt ist die Aberration. Breitet sich das Licht des Planeten quer zur Bewegungsrichtung der Erde aus, erscheint es einem Betrachter etwas weiter aus der Richtung der Erdbewegung zu kommen, vergleichbar mit der scheinbaren Windrichtung, die beim Kreuzen gegen den Wind auch scheinbar weiter von vorne kommt. Ist $\mathbf{e}_{\text{retarded}}$ die wahre (aber retardierte) Ausbreitungsrichtung des Lichtes vom Planeten so ergibt sich die beobachtbare (genannt: astrometrische) Richtung $\mathbf{e}_{\text{astrom}}$ aus dem Geschwindigkeitsdreieck, wie beim Segeln

$$c\mathbf{e}_{\text{astrom}} = c\mathbf{e}_{\text{retarded}} + \mathbf{v}_{\delta} \quad \text{oder} \quad \mathbf{e}_{\text{astrom}} = \mathbf{e}_{\text{retarded}} + \frac{\mathbf{v}_{\delta}}{c} \quad (5.2)$$

Wenn wir beide Effekte addieren, so sehen wir, dass nur noch die Differenzgeschwindigkeit zwischen der Erde und dem Planeten eine Rolle spielt, wie es die relativistische Invarianz der Lichtgeschwindigkeit erfordert. Bewegen sie sich parallel mit gleicher Geschwindigkeit, heben sich beide auf, so als wären Erde und Planet in Ruhe. Retardation und Aberration haben somit eigentlich eine gemeinsame Ursache, nämlich die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der gleichförmigen Bewegung des Bezugssystems.

Die Größenordnung dieses Effektes können wir am Beispiel der Sonne leicht abschätzen. In den 8 Minuten, die das Licht der Sonne zur Erde braucht, ist diese um $360^\circ \times 8^m / (365.25 \times 24 \times 60^m) = 0^\circ 0055 = 20''$

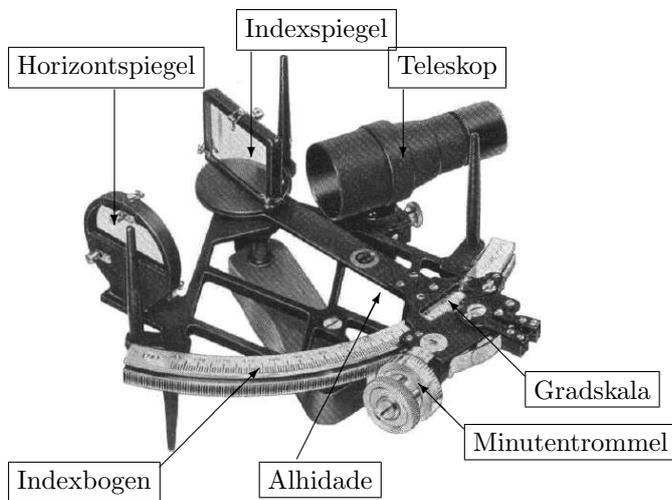


Abbildung 16: Aufbau eines Sextanten. Weitere Erläuterungen dazu sind im Text zu finden.

weitergewandert. Um diesen Aberrationswinkel sehen wir die Sonne von der Erde aus vorlicher (bezogen auf die Zeit also später), als sie eigentlich steht. Abgesehen davon, dass dieser Effekt wieder gerade an der Grenze unserer Genauigkeit liegt, ist er in den Jahrbuchwerten für die Sonne und die Planeten üblicherweise eingearbeitet.

6 Der Sextant

Neben der Zeit und den Gestirnspositionen bleibt noch eine wichtige zu ermittelnde Größe in (3.5) übrig, die Gestirns Höhe H , die wir mit dem Sextanten messen. Direkt bestimmen wir zunächst nur den sichtbaren Winkel zwischen Gestirn und Horizont. Bei Mond und Sonne zielen wir nicht auf die nur ungenau bestimmbare Mitte, sondern auf ihre Unter- oder Oberkante.

Der Sextant besteht aus einem Spiegelsystem, mit dem man zwei Objekte durch das Teleskop betrachtet zur Deckung bringen kann. Abb. 16 zeigt den Aufbau eines Sextanten. Die Lichtstrahlen z.B. eines Himmelskörpers werden durch Verstellen des Indexspiegels auf den Horizontspiegel geworfen und dort dem direkten Bild des Horizonts überlagert. Um beide Bilder gleichzeitig sehen zu können, wird als Horizontspiegel entweder ein halbverspiegeltes Glas eingesetzt (Vollsichtsextant) oder das Sichtfeld des Horizontspiegels ist in eine rechte transparente und linke verspiegelte Hälfte gespalten (Halbsichtsextant). Da der Indexspiegel fest auf der Alhidade montiert ist, kann seine Winkelstellung am Indexbogen abgelesen werden.

Das untere Ende der Alhidade rastet in eine Zahnung an der Unterkante des Indexbogens ein. Jeder Zahn entspricht einem Winkelgrad und die Gradzahl der Stellung des Indexspiegels kann so auf einer Skala an der Alhidade abgelesen werden. Es muss nicht besonders betont werden, dass jede Beschädigung dieser Zahnung des Indexbogens den Sextanten zu einem Totalschanden werden läßt. Die Feineinstellung der Bogenminuten geschieht durch die Minutentrommel. Darin verbirgt sich eine Schneckenschraube, die in die Indexzahnung greift und bei einer vollständigen Drehung die Alhidade jeweils um ein Grad weiter bewegt. An der Stellung dieser Schraube kann damit der Winkel des Indexspiegels innerhalb der Gradeinteilung abgelesen werden. Zur Verbesserung der Ablesung ist die Minutentrommel oft mit einem Nonius versehen, der es erlaubt, auch noch Bruchteile einer Minute bis zu ca. $0{'}{2}$ abzulesen. In Abb. 17 ist das untere Ende der Alhidade schematisch abgebildet. An der Markierung am Indexbogen liest man ab, dass der Winkel etwas über 28° beträgt. An der Nullstelle des Nonius sehen wir, dass noch etwas

mehr als $38'$ hinzukommen. Die Strichmarken der Nonius- und Minutenskala stimmen beim Noniuswert 3 überein, der Minutenwert des Winkels beträgt somit $38'3$.

Die Minutentrommel darf natürlich kein Spiel haben, muss andererseits aber auch leicht beweglich bleiben. Es ist kaum zu vermeiden, dass ein solches mechanischen System einen endlichen Schlupf besitzt. Es ist daher ratsam, bei Messungen die Alhidade immer von der gleichen Seite in die Endposition zu bewegen, die auch bei der Bestimmung des Indexfehlers benutzt wurde. Die Messgenauigkeit beträgt etwa $0'5$. Nur bei einem präzise gearbeiteten Sextanten, sorgfältiger Bedienung und besten äußeren Bedingungen werden wir den Fehler für die Einzelmessung auf $\sim 0'2$ halbieren können.

Für Höhenmessungen ist es zudem wichtig, dass der Sextant auch wirklich vertikal gehalten wird. Jede Neigung vergrößert den gemessenen Winkel. Aus diesem Grunde wird die Messung ausgependelt: Neigen wir den Sextanten leicht nach rechts und links muss das Gestirn nach oben über den Horizont auswandern. Hat das Gestirn die tiefste Bildposition erreicht, halten wir den Sextanten vertikal. Haben wir die vertikale Stellung gefunden, warten wir nur noch ab, bis das Gestirn den Horizont berührt und drücken in diesem Moment die Stoppuhr.

Zur Übersicht sind in Abb. 16 Filtergläser, die in den Strahlengang zwischen Horizont und Indexspiegel eingeklappt werden können, weggelassen. Sie sollen das Licht des Gestirns abmildern, so dass beide Bilder gleiche Helligkeit haben und so besser verglichen werden können. Bei Sonnenbeobachtung sind die Filter zum Schutz der Augen unverzichtbar. Wichtig ist, dass die Filtergläser den Strahlengang nicht stören und deshalb immer senkrecht zum Strahlengang eingesetzt werden.

In Abb. 18 ist der Strahlengang im Sextanten dargestellt. Wenn in den beiden Sichtfeldern der Horizont zur Deckung kommt, sind, wie im linken Teil der Abb. 18 gezeigt, beide Visierlinien und damit auch beide Spiegel genau parallel und die Winkel α und β sind bei beiden Spiegeln gleich. In dieser Position muss die Alhidade 0° anzeigen, sonst muss der entsprechende Indexfehler bei der Messung korrigiert werden. Zeigt also die Alhidade in dieser Stellung Ib° an, müssen von der späteren Messung diese Ib° als Indexbeschickung abgezogen werden. Hier ist Ib negativ wenn der Wert auf dem Vorbogen und positiv, wenn er auf dem Hauptbogen abgelesen wurde. Die Winkel an jedem Spiegel ergänzen sich jeweils zu (siehe Abb. 18)

$$2\alpha + \beta = \pi$$

Wählen wir α und β gleich groß, so wird $\alpha = 60^\circ$ und der Indexbogen überdeckt ein Sechstel des Vollkreises (daher der Name "Sextant").

Bei einer eigentlichen Höhenmessung wird der Indexspiegel und die mit ihm verbundene Alhidade wie im rechten Teil der Abb. 18 um einen Winkel δ gekippt. Die veränderten Winkel an dem Indexspiegel ergänzen sich wiederum zu π

$$2\alpha' + \beta' = \pi$$

Der Strahlengang ist unverändert bis auf die obere Visierlinie, die jetzt den Stern anpeilt. An dem

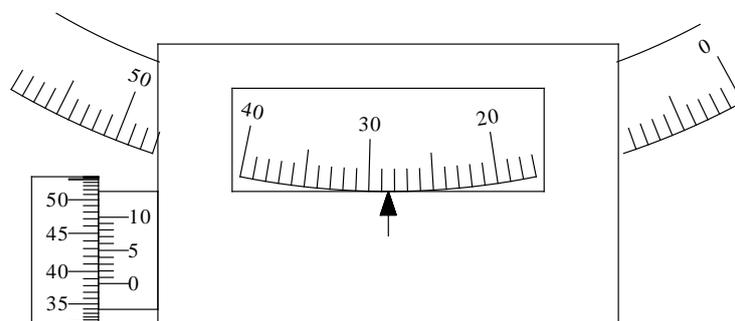


Abbildung 17: Gradskala des Indexbogens und Minutentrommel der Alhidade mit Nonius. Die Stellung der Alhidade entspricht hier einem Winkel von $28^\circ38'3$.

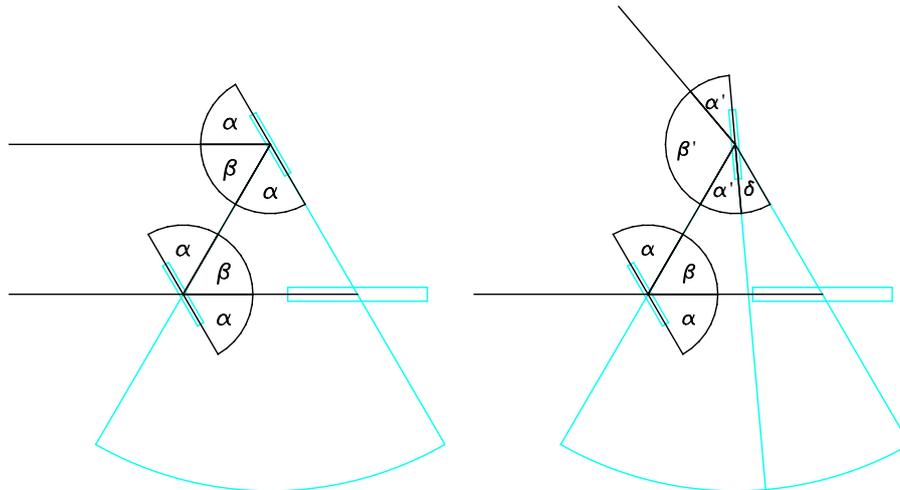


Abbildung 18: Strahlengang eines Sextanten bei der Indexkontrolle und der Höhenmessung.

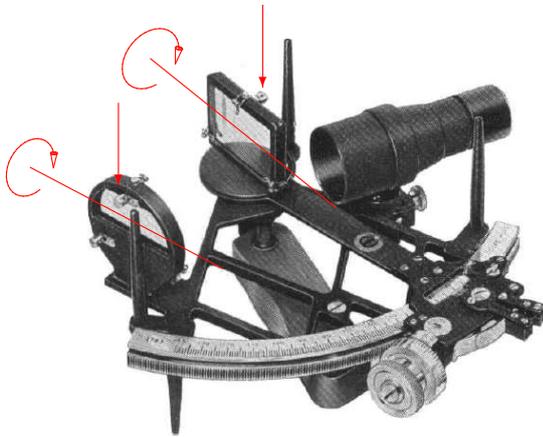


Abbildung 19: Korrektur der Spiegel bei einem Sextanten. Die Korrektur besteht in der Veränderung der Spiegelneigung um die angezeigte Achse. Dazu müssen die mit dem Pfeilbezeichneten Schrauben der Spiegelaufgabe verstellt werden.

Indexspiegel ist aus dem unteren Winkel α jetzt $\alpha = \alpha' + \delta$ geworden. Damit ist die Neigung der oberen Visierlinie gegenüber den Fall $\delta = 0^\circ$

$$\beta' - \beta = 2(\alpha - \alpha') = 2\delta$$

Die gemessene Höhe ist also immer doppelt so groß wie der an der Alhidade gemessene Winkel. Da die Winkelskala auf dem Indexbogen genau um diesen Faktor 2 gestreckt ist, kann trotzdem der Höhenwinkel direkt abgelesen werden.

Mit dem Sextanten können wir die Gestirnsgröße jedoch nur dann korrekt messen, wenn die beiden Spiegel genau senkrecht auf der Sextantenebene stehen, die von dem Drehpunkt der Alhidade und dem Indexbogen gebildet wird. Zudem muss die Achse des Teleskops genau parallel zu dieser Ebene verlaufen. Diese Fehler müssen von Zeit zu Zeit überprüft und ggf. korrigiert werden. Lediglich der Indexfehler wird nicht am Sextanten sondern bei der Auswertung durch die gemessene Indexbeschriftung korrigiert.

Die Ausrichtung der Spiegel kann leicht verstellt werden. Sie werden auf ihrer Frontseite mit Federn gegen ihre Auflage gedrückt, die von drei Schraubenenden gebildet werden. Diese Schrauben sind von der Rückseite der Spiegelhalterung in die Halterung geschraubt. Durch Drehen einer oder mehrerer der Schrauben kann die Auflageebene verstellt werden. In der Regel reicht die Korrektur an einer Schraube, die den Winkel der Spiegelebene gegen die Richtung der Normale der Sextantenfläche verstellt, aus (Abb. 19).

Um die Orientierung des oberen Indexspiegels zu überprüfen, stellen wir die Alhidade auf einen Winkel von $\sim 60^\circ$ ein und blicken von oben auf den Sextanten und zwar auf die Unterkante des Indexspiegels. Wir können dann den Indexbogen sowohl direkt als auch im Indexspiegel sehen (Abb. 20). Das direkte und das Spiegelbild des Indexbogens müssen ohne Versatz in einander übergehen.

Die Orientierung des unteren Horizontspiegels kann man überprüfen, indem man die Alhidade so verstellt, dass beide Visierlinien parallel verlaufen wie in der rechten Abb. 18. Die beiden Sextantenbilder haben dann keinen vertikalen Versatz mehr, d.h. bei einem Halbsichtsextanten ist dann kein vertikaler Versatz der Horizontlinie zwischen den Bildhälften sichtbar, beim Vollsextanten kommen die zwei Horizontbilder vertikal zur Deckung. Steht der Horizontspiegel nicht senkrecht auf der Sextantenebene, ist aber noch ein horizontaler Versatz der beiden Bilder zu sehen. Er wird deutlich, wenn wir mit unverändertem Sextanten ein vertikales Objekt, einen Mast oder Leuchtturm anpeilen.

Ein letzter, von uns einfach behebbarer Fehler ist die Fehljustierung des Teleskops, durch das man auf den Horizontspiegel sieht. Seine Achse muss exakt parallel zu der Sextantenebene verlaufen. Ist das nicht der Fall, werden gemessene Winkel zu groß angezeigt. Zur Überprüfung bringen wir im Sextanten zwei Sterne zur Deckung, die 90° oder mehr auseinander liegen. Diese Deckung muß über das gesamte Bildfeld erhalten bleiben wenn wir das Sternpaar vom rechten Rand des Bildfeldes zum linken wandern lassen. Die Teleskophalterung sollte mit Stellschrauben ausgestattet sein, mit denen die Ausrichtung des Teleskops korrigiert werden kann. Bei Halbsichtsextanten läßt sich die Überprüfung auf diese Weise nicht durchführen, denn es ist ja im Teleskop keine echte Überdeckung der beiden Sternbilder zusehen. Eine alternative Überprüfung kann folgendermaßen durchgeführt werden: Wir legen den Sextanten mal auf die eine, mal auf die andere Seite auf eine ebene Tischplatte. Das Teleskop blickt dabei immer an eine Stelle gegen die Zimmerwand, an der wir einen Zollstock senkrecht aufgestellt haben. Wir messen in beiden Fällen die jeweilige Höhe der des Teleskops über der Tischplatte (z.B. die jeweilige Unterkante des Objektivs) und lesen die Höhe am Zollstock ab, die in der Mitte des Bildfeldes des Teleskops beim Durchsehen zu sehen ist. Die Differenz der Höhen über der Tischplatte muss mit der Differenz der Zollstockhöhen übereinstimmen.

Natürlich muss nach jeder Manipulation der Spiegelstellschrauben oder der Teleskophalterung der Indexfehler neu bestimmt werden, denn er wird in der Regel durch diese Eingriffe verändert.

7 Reduktion der Gestirnhöhe

Der gemessene Winkel zwischen Gestirn und sichtbarem Horizont ist leider noch nicht die gesuchte Gestirnhöhe, die idealerweise vom Erdmittelpunkt aus gemessen werden müsste, denn auf diesen Punkt beziehen sich die tabellierten Jahrbuch- und gerechneten Ephemeridenwerte. Noch weitere Korrektu-

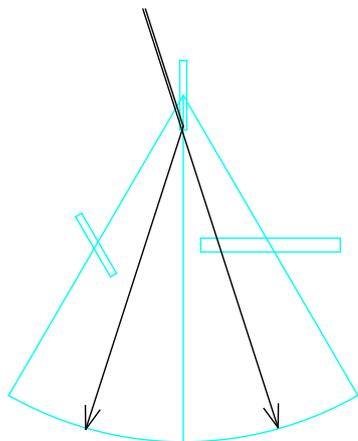


Abbildung 20: Überprüfung des Indexspiegels eines Sextanten durch die sichtbare Kontinuität des direkten und des des gespiegelten Indexbogens. Diese wird sichtbar, wenn man, wie in der Zeichnung angedeutet, von schräg oben auf den Indexspiegel sieht. Die Alhidade muss dazu auf einen Winkel um die 60° gestellt werden, das Teleskop weggeklappt oder aus seiner Halterung genommen werden.

ren müssen angebracht werden, so dass wir unsere Genauigkeitsabschätzung von $\simeq 0.2$ bis 0.5 schon dahinschmelzen sehen. Irgendwo habe ich gelesen, dass ein typischer Fehler bei der astronomischen Ortsbestimmung etwa 2 sm beträgt. In Winkel ausgedrückt sind das $2'$, also vier bis zehn mal so groß. Am Ende dieses Kapitels wisst ihr, warum.

7.1 Kimmtiefe

Die ideale Horizontebene, der topozentrische Horizont, ist eine Tangentialebene an die ruhige Wasseroberfläche. Beide berühren sich an unserem Standort. Da wir ja hoffentlich immer den Kopf etwas über Wasser haben, sehen wir an unserem topozentrischen Horizont nicht entlang, sondern von oben drauf. Zusammen mit der Erdkrümmung führt das dazu, dass die für uns sichtbare Horizontgrenze, die Kimm, tiefer liegt als es der Flucht dem idealen topozentrischen Horizont entspricht.

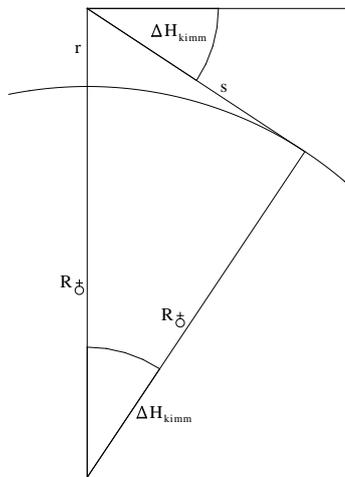


Abbildung 21: Skizze zur Berechnung der Kimmtiefe ΔH_{kimm} . Die mit s bezeichnete Gerade ist die direkte Sichtlinie zur Kimm. Die horizontale Gerade verläuft parallel zum topozentrischen Horizont.

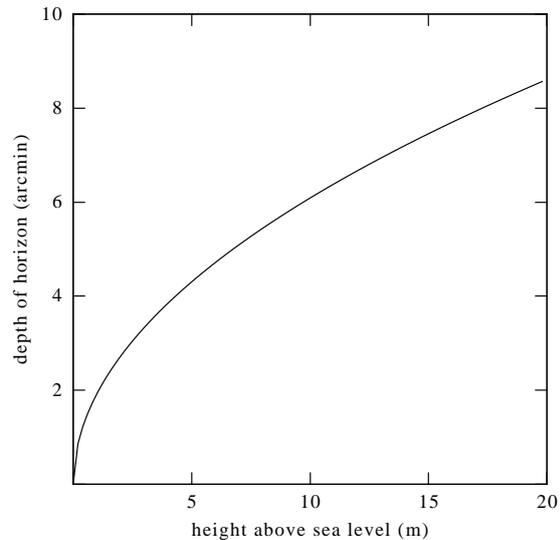


Abbildung 22: Korrekturwert für die Kimmtiefe ΔH_{kimm} als Funktion der Augenhöhe r nach Gleichung 7.3. Der Korrekturwert muss immer vom Messwert der Höhe abgezogen werden.

Der Winkel ΔH_{kimm} , um den wir die Kimm zu tief sehen, hängt eng zusammen mit der Sichtweite s von unserem um r erhöhten Standort über der gekrümmten Erdoberfläche. Nach der Konstruktion in Abb. 21 hängen s und ΔH_{kimm} durch

$$s = R_0 \tan(\Delta H_{\text{kimm}}) \simeq R_0 \Delta H_{\text{kimm}} \quad (\text{Bogenmaß})$$

$$s = 1 \text{ sm} \frac{\Delta H_{\text{kimm}}}{1'} \quad (7.1)$$

zusammen. Der Winkel ΔH_{kimm} ist so klein, dass wir \tan durch die Identität ersetzt haben. Das setzt voraus, dass ΔH_{kimm} in Bogenmass angegeben wird. Praktischer ist die Angabe in Bogenminuten und die Ersetzung $R_0 \rightarrow 1 \text{ sm}/1'$, die dann in der zweiten Zeile vorgenommen wurde (siehe Anhang B). Die Sichtweite hat also etwa den gleichen Zahlenwert in Seemeilen wie die Kimmtiefe in Bogenminuten.

Nach Pythagoras erhalten wir die geometrische Sichtweite s auf der sphärischen Erde von einem

Standort mit der Augeshöhe r über dem Meeresspiegel mit (siehe Abb. 21)

$$(R_{\oplus} + r)^2 - R_{\oplus}^2 = s^2 \quad \text{oder} \quad s = \sqrt{2R_{\oplus}r + r^2} \simeq \sqrt{2R_{\oplus}r} = 1.93 \text{ sm} \sqrt{\frac{r}{1 \text{ m}}} \quad (7.2)$$

wenn wir den mittleren Erdradius $R_{\oplus} = 6378 \text{ km}$ einsetzen. Der Winkel der Kimmtiefe ergibt sich damit aus (7.1) und (7.2) zu

$$\Delta H_{\text{Kimm}} = 1' \frac{s}{1 \text{ sm}} = 1'93 \sqrt{\frac{r}{1 \text{ m}}} \quad (7.3)$$

Der Zusammenhang (7.3) ist in Abb. 22 noch einmal graphisch dargestellt.

Der Faktor 1.93 in Formel (7.2) stimmt nicht ganz mit Werten überein, die in einigen Lehrbüchern angegeben sind. Er ist dort oft etwas größer, z.B. 2.07 im SHS Lehrbuch, weil die Refraktion in der Atmosphäre stillschweigend mit berücksichtigt wurde. Wir behandeln sie hier jedoch gesondert im nächsten Kapitel.

7.2 Refraktion

Die Brechzahl der Erdatmosphäre ist nicht genau Eins, sondern je nach Dichte der Moleküle etwa 1.0003. . . Die Abnahme der Dichte mit der Höhe führt zu einer entsprechenden Abnahme der Brechzahl.

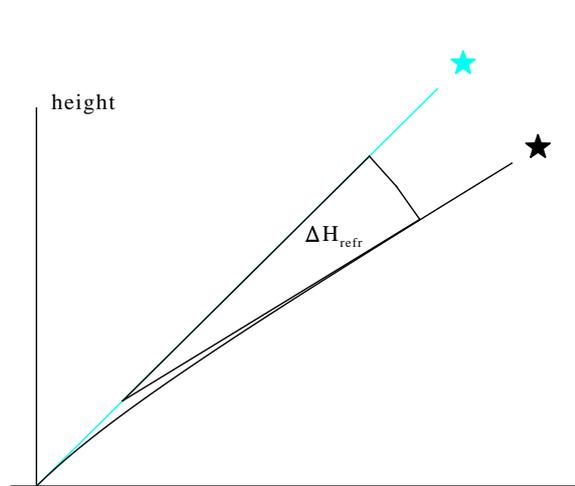


Abbildung 23: Skizze zur Brechung der Lichtstrahlen in der Atmosphäre. Der wahre Strahl ist schwarz, der scheinbare blau gezeichnet. Außerhalb der Atmosphäre verläuft der wahre Lichtstrahl wie der scheinbare als Gerade, bildet mit ihm aber einen endlichen Winkel ΔH_{refr} .

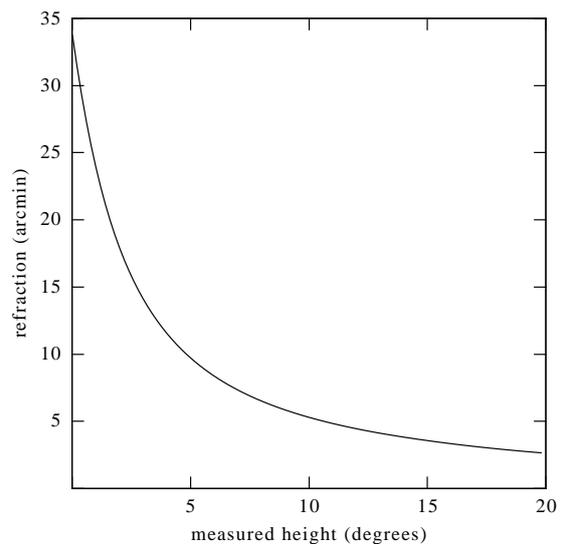


Abbildung 24: Korrekturwert ΔH_{refr} für den Refraktionseffekt der Atmosphäre. Der Wert muss immer von der sichtbaren Höhe H_{vis} abgezogen werden, denn die Refraktion beugt den Lichtstrahl (fast) immer nach unten.

Lichtstrahlen werden in inhomogenem Medien immer zu Gebieten mit geringerer Lichtgeschwindigkeit, also größerer Brechzahl hin gebrochen (das Prinzip wird z.B. in Glasfaserkabeln ausgenutzt um die Lichtstrahlen immer zum Kabelzentrum zu brechen). In der Atmosphäre ist die Folge, dass das Licht eines Gestirns zur Erdoberfläche hin gebrochen wird und wir somit das Gestirn in einer größeren Höhe wahrnehmen, als es wirklich steht (Abb. 23). Die sichtbare Höhe H_{vis} , die wir nach der Korrektur der

Kimmtiefe erhalten, muß demnach nach unten korrigiert werden. Hierzu werden Näherungsformeln verwendet, die den beobachteten Refraktionseffekten angepaßt sind. Unsere Formel ist [5] entnommen. Hier ist H_{vis} die sichtbare Höhe in Grad, ΔH_{refr} die abzuziehende Korrektur in Bogenminuten

$$\Delta H_{\text{refr}} = \begin{cases} 0'280 \frac{p/1 \text{ hPa}}{(273 + T/1 \text{ C}^\circ)} \frac{1}{\tan\left(H_{\text{vis}} + \frac{7.31^\circ}{4.40 + H_{\text{vis}}/1^\circ}\right)} & \text{wenn } H_{\text{vis}} < 15^\circ \\ 0'272 \frac{p/1 \text{ hPa}}{(273 + T/1 \text{ C}^\circ)} \frac{1}{\tan(H_{\text{vis}})} & \text{wenn } H_{\text{vis}} > 15^\circ \end{cases} \quad (7.4)$$

Weiter ist p der Druck in hPa und T die Temperatur in C° . Der Faktor $p/(273 \text{ C}^\circ + T)$ ist damit direkt proportional zur Anzahl der Moleküle in einem m^3 unter dem gegebenen Druck p und der Temperatur T .

Die Abhängigkeit der Refraktionskorrektur ΔH_{refr} vom der sichtbaren Höhe H_{vis} ist in Abb. 24 dargestellt. Die Refraktion ist besonders am Horizont bei $H_{\text{vis}} \rightarrow 0$ groß und hat dort für die Standardatmosphäre ($p = 1013 \text{ hPa}$, $T = 20 \text{ C}^\circ$) einen Wert von etwa $34'$. Die starke Zunahme von ΔH_{refr} für $H_{\text{vis}} \rightarrow 0$ bewirkt, dass die Unterkante der Sonne stärker gebrochen wird als die Oberkante, die sichtbare Sonne wird zu einer Ellipse abgeplattet. Aus (7.4) erhalten wir bei $H_{\text{vis}} = 0$ eine Änderung der Refraktionskorrektur ΔH_{refr} pro Höhenänderung in H_{vis} von $d\Delta H/dH = 12'6/1^\circ = 0'21/1'$. Der vertikale Durchmesser schrumpft also um $1/5$ gegenüber dem wahren Durchmesser, der in horizontaler Richtung sichtbar bleibt (siehe Abb. 25).

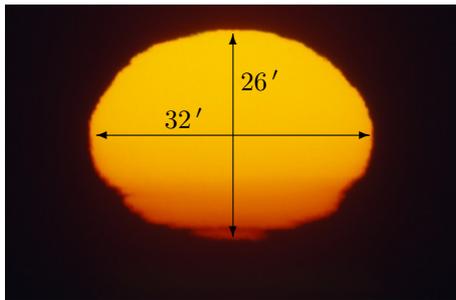


Abbildung 25: Aufnahme der Sonne kurz vor dem Untergang. Sie zeigt die scheinbare Deformation der Sonnenscheibe bei $h \simeq 0$ direkt über dem Horizont. Das Verhältnis von sichtbarem vertikalem zu horizontalem Durchmesser liegt bei $4/5$. Der horizontale Durchmesser von $32'$ ist unverändert, der vertikale Durchmesser ist durch die zum Horizont hin stark zunehmende Refraktion auf etwa $26'$ verkürzt.

Von dem Prinzip, dass Lichtstrahlen in der Atmosphäre zur Erdoberfläche hin gebrochen werden, gibt es unter bestimmten Bedingungen Ausnahmen: über stark aufgeheizten Bodenflächen kann es vorkommen, dass der Nenner in (7.4) zum Boden hin stärker zunimmt als der Luftdruck p im Zähler. Die Folge ist, dass $p/(273 \text{ C}^\circ + T)$ in der Bodenschicht nach unten hin abnimmt und dort Lichtstrahlen nach oben gebrochen werden. Dies ist die Voraussetzung für Luftspiegelungen auf heißen Straßenoberflächen und für eine Fata-Moranga in der Wüste.

Die Formel (7.4) gilt für eine horizontal geschichtete Atmosphäre mit einem vertikalen Temperaturgradient einer Standardatmosphäre. Der wahre Wert für die Refraktionskorrektur kann durchaus um mehrere Prozent von (7.4) abweichen. Um den absoluten Fehler gering zu halten, sollten daher Gestirnhöhen unterhalb $\sim 10^\circ$ für die Navigation vermieden werden.

7.3 Tägliche Parallaxe

Bei Himmelskörpern in unserer Nähe macht es einen Unterschied, ob wir sie vom Erdmittelpunkt aus sehen oder von der Erdoberfläche. Die Positionen der Himmelskörper in Ephemeridenrechnungen und Tabellen werden immer auf den Erdmittelpunkt bezogen, manchmal auch auf den gemeinsamen Schwerpunkt, das Baryzentrum von Erde und Mond. Rechnen wir mit diesen Positionen und bekannten eignen geographischen Koordinaten die Höhe H nach (3.5) aus, erhalten wir die in Abb. 26 gezeigte geozentrische Höhe H_{geoc} . Wir messen die Positionen aber auf der Erdoberfläche, 6378 km vom Erdzentrum entfernt und erhalten daher die topozentrische Höhe H_{topo} in Abb. 26 nach Anbringen der bisherigen Korrekturen.

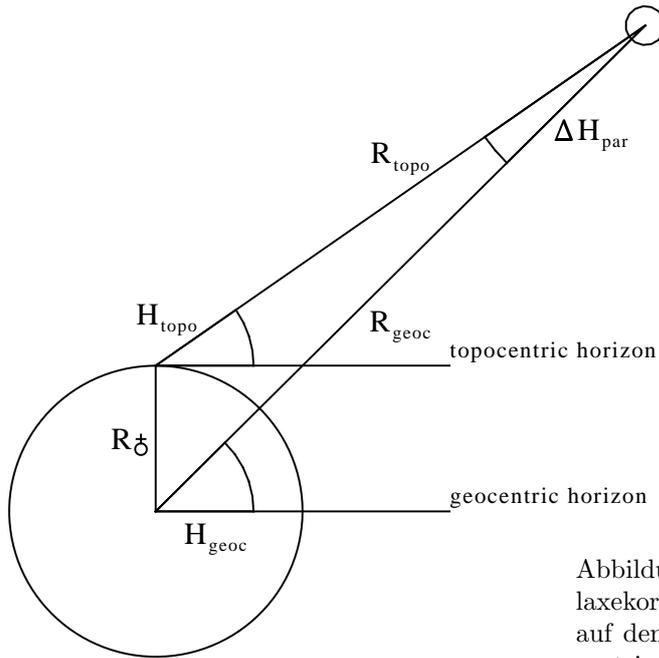


Abbildung 26: Zur Konstruktion der Parallaxekorrektur ΔH_{par} . Der Beobachtungsort ist auf dem Scheitel der Erdkugel, wo der topozentrische Horizont die Erdkugel berührt.

Die Differenz läßt sich jedoch leicht korrigieren, solange wir die Erde als Kugel ansehen. Der geometrische Unterschied zwischen topozentrischer und geozentrischer Höhe ist in Abb. 26 dargestellt. Das Dreieck aus Erdzentrum, Beobachter, Gestirn hat die Innenwinkel ΔH_{par} , $H_{\text{topo}} + \pi/2$ und $\pi/2 - H_{\text{geoc}}$, die sich zu π ergänzen müssen. Folglich ist $\Delta H_{\text{par}} = H_{\text{geoc}} - H_{\text{topo}}$. Der Sinussatz für dieses Dreieck gibt (Abb. 26)

$$\frac{\sin(\Delta H_{\text{par}})}{R_{\delta}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + H_{\text{topo}})}{R_{\text{geoc}}} \quad \text{oder}$$

$$\Delta H_{\text{par}} = \text{asin}\left(\frac{R_{\delta}}{R_{\text{geoc}}} \cos(H_{\text{topo}})\right) \simeq \frac{R_{\delta}}{R_{\text{geoc}}} \cos(H_{\text{topo}}) \quad (\text{Bogenmaß})$$

Da es sich bei ΔH_{par} immer um kleine Winkel handelt, wird meist der asin durch die Identität ersetzt. Das Verhältnis von Erdradius zu Gestirnsabstand kann für den Mond und die Planeten vorrausberechnet werden. Der Wert schwankt leicht, da der Bahnabstand zum Himmelskörper variiert. In Grad bzw. Gradminuten ausgedrückt, heißt das Verhältnis Horizontalparallaxe (abgek. HP). Damit wird die Parallaxekorrektur in Gradminuten (ein Halbkreis vom Bogenmaß π hat 10800 Bogenminuten)

$$\boxed{\Delta H_{\text{par}} = \text{HP} \cos(H_{\text{topo}}) \quad \text{wobei} \quad \text{HP} = \frac{10800'}{\pi} \frac{R_{\delta}}{R_{\text{geoc}}}} \quad (7.5)$$

Der aktuelle Wert für HP kann mit den Formeln des Anhangs E berechnet oder auch den Nautischen Jahrbüchern entnommen werden. Wichtig ist, dass wir den Korrekturwert ΔH_{par} zur gemessenen (und mit den bisher besprochenen Korrekturen versehenen) Höhe Alt_{topo} hinzu addieren müssen, um Alt_{geoc} zu erhalten.

Mit dem anderen Sinussatz für das gleiche Dreieck in Abb. 26 bekommen wir auch den genauen topographischen Abstand des Himmelskörpers

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - H_{\text{geoc}})}{R_{\text{topo}}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + H_{\text{topo}})}{R_{\text{geoc}}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{R_{\text{geoc}}}{R_{\text{topo}}} = \frac{\cos(H_{\text{topo}})}{\cos(H_{\text{geoc}})} = \frac{\cos(H_{\text{topo}})}{\cos(H_{\text{topo}} + \Delta H_{\text{par}})} \simeq 1 + \Delta H_{\text{par}} \tan(H_{\text{topo}})$$

Hier ist die Parallaxekorrektur ΔH_{par} wieder im Bogenmaß einzusetzen. Mit (7.5) folgt also

$$\frac{R_{\text{geoc}}}{R_{\text{topo}}} = 1 + \frac{\pi \text{HP}}{10800'} \sin(H_{\text{topo}}) \quad (7.6)$$

Messen wir die Ober- oder Unterkante z.B. des Mondes, müssen wir den halben sichtbaren Durchmesser des Himmelskörpers zur gemessenen Höhe abziehen oder hinzuaddieren, um die richtige Höhe des Gestirnszentrums zu ermitteln. Im Jahrbuch steht immer der auf den Erdmittelpunkt bezogene sichtbare Durchmesser. Da der sichtbare Durchmesser umgekehrt proportional zum Abstand des Betrachters variiert, müssen die Jahrbuchwerte des Durchmessers um genau den Faktor (7.6) korrigiert werden, damit wir den von uns beobachteten Radius zu erhalten.

Da wir nicht sehr genau messen, ist die nötige Parallaxekorrektur eigentlich nur beim Mond interessant. Der Mond ist etwa $36 R_{\oplus}$ entfernt, so dass $\text{HP} \simeq 1/60$ in Bogenmaß oder $57'3$ beträgt. Für die Sonne mit einem Abstand von $1 \text{ AU} = 1.496 \cdot 10^8 \text{ km}$ erhalten wir $\text{HP} = 4.3 \cdot 10^{-5}$ im Bogenmaß entsprechend $8''8$. Für Planeten und die Sonne können wir die tägliche Parallaxekorrektur also getrost vergessen. Am nächsten kommt uns die Venus. In Konjunktion ist ihr Abstand von der Erde 0.38 AU , ihre Horizontalparallaxe also maximal $23''2$.

Die Korrektur (7.6) zwischen geozentrischem und topozentrischen Gestirnsradius ist selbst für den Mond klein. Bei einer Horizontalparallaxe von $\text{HP} \simeq 1^\circ$, ergibt sich ein maximale Abstandskorrektur und entsprechende Radiuskorrektur von 1.75% , wenn der Mond im Zenit steht. Bei $16'$ für den mittleren Mondradius ergibt das einen Korrekturwert von $0'3$. Wir werden diese Korrektur ganz vernachlässigen.

Zusammengefasst:

Allgemeines Schema für die Höhenreduktion:	
Datum	Uhrzeit
Luftdruck p	Lufttemperatur T
Augeshöhe r	
Horizontalparallaxe HP	nur für Mond und Planeten; aus JB
Gestirnsradius SD	nur für Sonne und Mond; aus JB
Sextantenablesung	
– Indexfehler Ib	(Ib > 0 auf Vorbogen)
Kimmaabstand H_{kimm}	
– Kimmtiefe ΔH_{kimm}	Gl. (7.3)
Sichtbare Höhe H_{vis}	
– Refraktion ΔH_{refr}	Gl. (7.4)
± Gestirnsradius SD	± für Unter/Oberkante
Topozentr. Höhe H_{topo}	
+ Parallaxe ΔH_{par}	Gl. (7.5)
Geozentr. Höhe H_{geoc}	

7.4 Höhenreduktion im Nautischen Jahrbuch

Von der eigentlichen Ableseung des Messwertes am Sextanten bis zur geozentrischen Höhe des Gestirns, auf der unsere Formeln (3.5) bis (3.8) beruhen, sind also einige Korrekturschritte notwendig. Wir können die einzelnen Korrekturen selbst berechnen oder aber die gesamte Korrektur dem Nautischen Jahrbuch

des BSH entnehmen. Die Jahrbuchwerte setzen immer eine Standardatmosphäre voraus. Wenn es darauf ankommt, ist man deshalb mit der eigenen Berechnung genauer, da auf lokale Druck- und Temperaturverhältnisse Rücksicht genommen werden kann.

Im Nautischen Jahrbuch gibt es für den Sonnen- und Mondunterrand und für Sterne/Planeten je verschiedene Tabellen. In den Tabellen für Sonne, Sterne und Planeten ist für verschiedene Kimmabstände H_{kimm} und Augeshöhen r jeweils zunächst die zeitunabhängige Hauptbeschickung aufgelistet. Unterhalb dieser Tabelle findet man noch eine zeitabhängige Zusatzbeschickung, die für die Sonne den variablen Anteil des Sonnenradius enthält und für Planeten die Parallaxekorrektur. Für die Sonne bezieht sich die Hauptbeschickung auf den mittleren Sonnenunterrand, daher beinhaltet die Zusatzbeschickung für den Sonnenunterrand lediglich den kleinen variablen Anteil des Sonnenradius, für den Sonnenoberrand aber den gesamten Sonnendurchmesser.

Höhenreduktion für die Sonne, Sterne und Planeten nach dem Nautischem Jahrbuch:	
Datum	Uhrzeit UT1
Augeshöhe r	
Sextantenablesung – Indexfehler I_b	($I_b > 0$ auf Vorbogen)
Kimmaabstand H_{kimm}	
+ Hauptbeschickung	entspr. H_{kimm} und r
+ Zusatzbeschickung	entspr. Datum oder H_{kimm} und HP
Geozentr. Höhe H_{geoc}	

In der Tabelle für den Mond ist statt der Augeshöhe die Horizontalparallaxe HP der zweite Tabellenparameter in der Hauptbeschickungstabelle. Die Augeshöhe r wird dann in der Zusatzbeschickung in einer weiteren Tabelle angenähert berücksichtigt. Die Werte Korrekturwerte sind immer auf den Mondunterrand bezogen, den man üblicherweise misst. Falls der Mondoberrand gemessen wurde, ist der sichtbare Monddurchmesser von der gemessenen Höhe zusätzlich abzuziehen. Nach (7.5) hängen Abstand und Parallaxe direkt zusammen, im Nautischen Jahrbuch ist daher der Mondradius in den Schalttafeln unter dem jeweiligen Parallaxewert HP abzulesen.

Höhenreduktion für den Mond nach dem Nautischem Jahrbuch:	
Datum	Uhrzeit UT1
Horizontalparallaxe HP	aus JB
Augeshöhe r	
Sextantenablesung – Indexfehler I_b	($I_b > 0$ auf Vorbogen)
Kimmaabstand H_{kimm}	
+ Hauptbeschickung	entspr. H_{kimm} und HP
+ Zusatzbeschickung	entspr. r
– Monddurchmesser 2SD	nur falls Oberrand gemessen; entspr. HP
Geozentr. Höhe H_{geoc}	

8 Lösungsverfahren der Nautischen Dreiecksgleichung

Das Dilemma der Ortsbestimmung bei nur einer Gestirnsbeobachtung haben wir schon oben geschildert: der Azimut des Gestirns ist nur sehr ungenau zu messen, uns bleibt nur die Höhe H des Gestirns als einzige verlässliche Messung. Daher ist Gleichung (3.5), die im Gegensatz zu den anderen (3.6), (3.7) oder (3.8) den Azimut A nicht enthält, von zentraler Bedeutung.

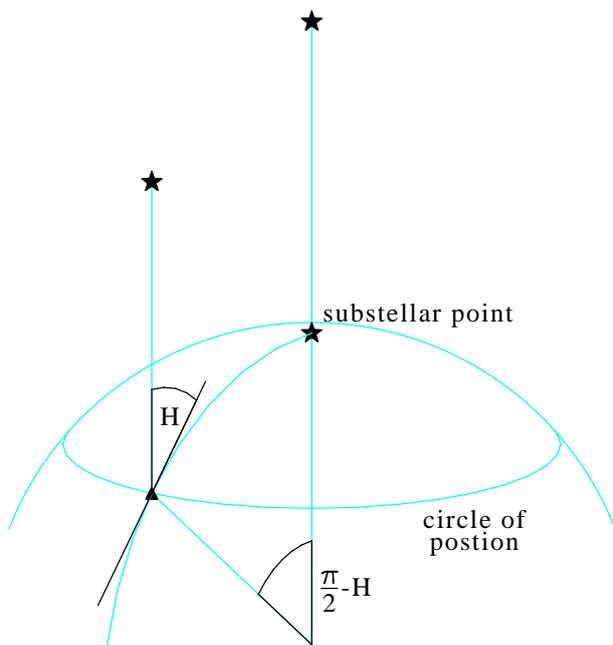


Abbildung 27: Bildpunkt eines Gestirns (substellar, subsolar, sublunar etc. point) und der Kreis der Höhengleiche (circle of position) von dem aus das Gestirn unter der Höhe H gesehen wird. Das Gestirn muss natürlich ∞ weit weg sein, sonst sind Parallaxekorrekturen notwendig.

Die Positionen, von denen ein Gestirn auf gleicher Höhe H über dem Horizont beobachtet werden kann, liegen alle auf einem Kreis um den Bildpunkt des Gestirns (Höhengleiche oder circle of position, Abb. 27). Der Radius dieses Kreises beträgt $R_{\oplus} \cos(H)$, gemessen in der Ebene, die der Kreis bildet. Die Entfernung von einem Punkt des Kreises zum Bildpunkt im Zentrum entlang der gekrümmten Erdoberfläche beträgt $R_{\oplus}(\pi/2 - H)$, wobei H in Bogenmaß angegeben werden muss. Den Winkel $\pi/2 - H$ vom Erdzentrum aus zwischen der Gestirnsrichtung und der Zenitrichtung des Beobachters nennt man auch die Zenitdistanz.

Wir müssen zwei Ortskoordinaten, Länge und Breite, bestimmen, somit also mindestens zwei Höhenmessungen durchführen. Der Standpunkt ergibt sich dann als einer der beiden Schnittpunkte der zwei Höhengleichen. Es gibt verschiedene Ansätze, mit den vielfachen Messungen umzugehen. Das klassische Verfahren besteht darin, jede Messung unabhängig auszuwerten und das Ergebnis in Form einer Standlinie als Annäherung an die Höhengleiche in die Karte zu zeichnen. Der Schnittpunkt mehrerer Standlinien miteinander ergibt dann den Standort. Der Vorteil ist, dass man auch mehr als zwei Messungen immer nach dem gleichen Verfahren durchführen und auswerten kann. Die Streuung der Schnittpunkte gibt an, wie genau man gemessen und gezeichnet hat. Die Alternative ist, paarweise aus zwei Messungen einen Standpunkt direkt auszurechnen. Eine Anzahl von n Messungen ergibt $n(n - 1)/2$ Paare, die dann zu $n(n - 1)/2$ berechneten Positionen führen. Wenn man richtig gerechnet hat, hängt die Streuung der berechneten Positionen nur noch von der Messungenauigkeit ab, es gibt keine zeichnerischen Fehler, die in die Auswertung eingehen.

Der graphische Teil der Standortbestimmungen bei dem Standlinienverfahren wird oft mangels einer großskaligen Karte (wenn nicht gerade ein Standort in Küstennähe gesucht wird, wo man hoffentlich Karten mit großem Maßstab dabei hat) auf einem Plottingsheet gelöst. Dieses stellt einen kleinen Kartenausschnitt der Umgebung der vermuteten eigenen Position dar. Die Plottingsheet kann man sich schnell selber herstellen (Abb. 28). Der Ausschnitt muss auf kleinem Gebiet der Merkatorokarte entsprechen, damit die Karte winkeltreu ist. Das ist insbesondere bei der St.Hilaire-Methode (siehe unten) wichtig, bei der die Standlinie als Senkrechte zur einer Azimutlinie konstruiert wird. Diese Senkrechte sollte auch in der Karte senkrecht abgebildet werden.

Wie in Kapitel 2.1 muss die Plottingsheet berücksichtigen, dass der Abstand der Längengrade bei einer Breite φ_0 um den Faktor $\cos \varphi_0$ verkürzt ist. Dazu wählt man erst einen Abbildungsmaßstab Δ

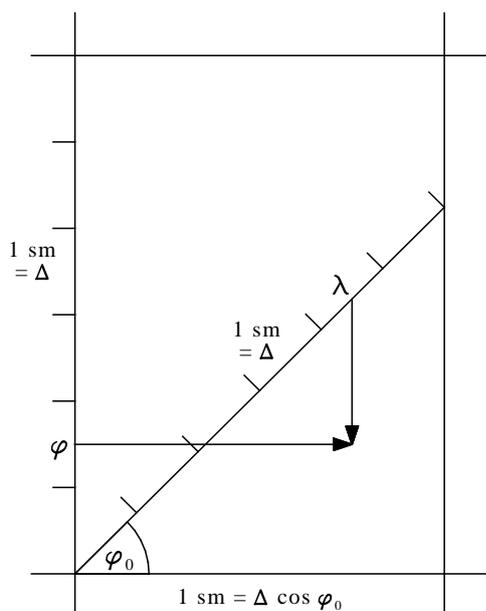


Abbildung 28: Konstruktion einer Plottingsheet für eine Breite φ_0 . Der Abstand zwischen den Achsenmarkierungen auf der Ordinate und der schrägen Hilfslinie muss gleich sein und kann auch mit einem Zirkel übertragen werden. Wird die der Abstand in ganzen cm Einheiten gewählt, gehts auch schnell mit dem Lineal.

für eine Seemeile und den benötigten Kartenausschnitt, so dass alles auf das Plottingsheet paßt und die Auflösung noch ausreichend ist (nicht kleiner als $\Delta = 1\text{mm}$). Man zeichnet dann von der linken unteren Ecke eine Hilfslinie mit der Neigung der ungefähren Breite φ_0 , in der wir uns befinden, in die Karte. Alle Breiten werden wie üblich direkt am linken Kartenrand abgegriffen. Die Horizontale durch diesen Punkt gibt so das gewünschte Breitenparallel in der Karte. Die Längen werden mit dem gleichen Maßstab aber entlang der Hilfslinie abgegriffen. Die Vertikale durch den λ zugeordneten Punkt auf der Hilfslinie ist dann der Kartenmeridian mit der gewünschten geographischen Länge. Die Koordinaten auszulesen geht entsprechend umgekehrt. Eine Versegelung kann direkt als Vektor mit der entsprechenden Kursrichtung KüG gegen Nord und einer Vektorlänge $FüG\Delta t$ eingezeichnet werden, nachdem sie am linken Kartenrand oder der Hilfslinie auf den Kartenmaßstab übertragen wurde.

Die zwei oder mehr Höhenmessungen werden sich nicht gleichzeitig durchführen lassen. Liegt zwischen den beiden Messungen eine Zeitspanne, in der wir uns um mehrere Seemeilen fortbewegt haben, müssen wir diese Versegelung berücksichtigen. Ignorieren wir die Versegelung in unserer Auswertung, kommt nicht etwa ein "mittlerer" Standort heraus. Das falsche Resultat wird in der Regel einen erheblichen Abstand von unserer Kurslinie haben.

Die Versegelung kann zum einen dadurch berücksichtigt werden, dass man den Bildpunkt des Gestirns der ersten Messung um die versegelte Strecke verschiebt. Die zweite analoge Möglichkeit besteht darin, die Standline, die aus der ersten Messung resultiert, um die versegelte Strecke zu versetzen.

Da diese versegelte Distanz in der Regel klein ist, können wir dafür wieder die Näherung (2.1 und 2.2) benutzen. Ist Δt die Zeit zwischen den Messungen, so hat der Verschiebungsvektor die NS und EW Komponenten

$$\Delta x = FüG \Delta t \sin(KüG) , \quad \Delta y = FüG \Delta t \cos(KüG) \quad (8.1)$$

Die Beträge sind in Seemeilen, wenn $FüG$ in Knoten und Δt in Stunden angegeben wird. Die entsprechende Änderung in Länge und Breite ist dann in Bogenminuten

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta x}{\cos(\varphi)} , \quad \Delta \varphi = \Delta y \quad (8.2)$$

Zur Berücksichtigung der Versegelung korrigieren wir entweder

1) vor der Auswertung den Stundenwinkel $LHA \leftarrow LHA - \Delta \lambda$ (Minus, da der Stundenwinkel positiv nach Westen zählt, die Länge aber positiv nach Osten) und die Deklination $\delta \leftarrow \delta + \Delta \varphi$ des Gestirns der

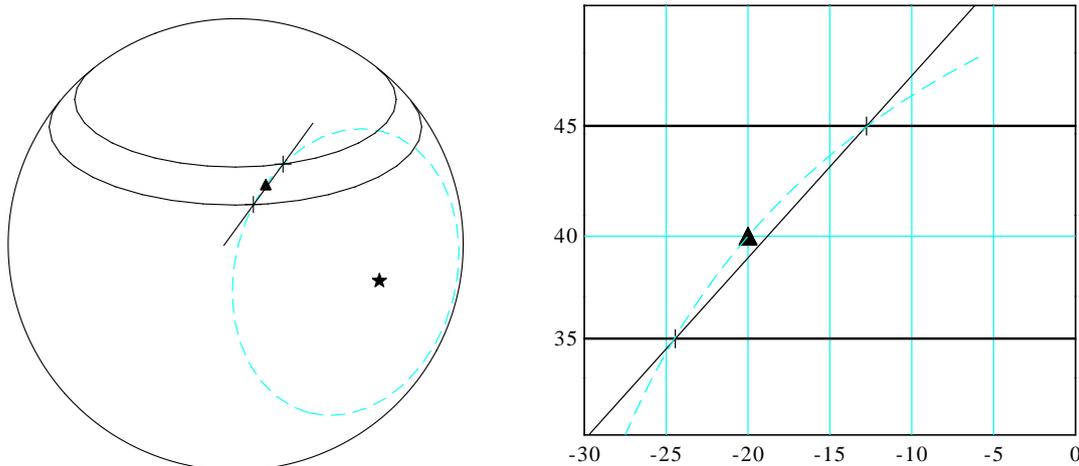


Abbildung 29: Konstruktion der Standlinie nach Sumner, auf der Erdkugel und in der Mercatorkarte dargestellt. ▲ bezeichnet die Position des Beobachters, dessen gemessene wahre Höhe H für die Standlinienberechnung benutzt wurde. Als Rechenbreiten wurden $\varphi_r=35^\circ$ und 45° gewählt. Die + Symbole geben die errechneten Rechenpositionen (λ_r, φ_r) wieder. Die Rechenbreiten haben einen für praktische Fälle viel zu großen Abstand. Er wurde gewählt, um das Konstruktionsprinzip auch auf der Kugel noch sichtbar zu machen. Die wahre Höhengleiche ist gestrichelt dargestellt.

ersten Höhenmessung,
oder

2) die Standlinie, die wir als Ergebnis der Auswertung der ersten Höhenmessung errechnen, um die versegelte Strecke $(\Delta x, \Delta y)$ in der Plottingsheet.

Wählen wir Methode 1), müssen wir selbstverständlich zunächst LHA und δ zum wahren ersten Meßzeitpunkt im Nautischen Jahrbuch nachsehen bzw. berechnen, dann die Werte um $-\Delta\lambda$ und $\Delta\varphi$ verschieben. Der Standpunkt, den wir so erhalten, ist dann der Standpunkt bei der späteren, zweiten Messung. Haben wir mehr als zwei Messungen, verschieben wir analog alle Messungen auf den Zeitpunkt der letzten Messung und erhalten dann deren Standort.

8.1 Standlinienverfahren nach Sumner

Ein Weg, um mit Hilfe von (3.5) zu einer Standlinie zu kommen, besteht darin, eine der zu bestimmenden Koordinaten vorzugeben und dann nach der anderen aufzulösen. Traditionell gibt man die Breite vor, da (3.5) einfacher nach LHA und damit nach der Länge auflösbar ist. Da diese angenommene Breite natürlich in den seltensten Fällen mit unserer wirklichen Breite übereinstimmt, nennen wir sie zur Unterscheidung die Rechenbreite φ_r . Errechnen wir durch Vorgabe vieler verschiedener Rechenbreiten entsprechend viele Längen λ_r und zeichnen die Rechenpostionen (λ_r, φ_r) in die Karte ein, können wir im Prinzip die gesamte Höhengleiche rekonstruieren.

Uns interessiert eigentlich aber nur das kurze Stück der Höhengleiche in der Nähe unseres Standortes. Daher geben wir nur zwei Rechenbreiten φ_{r1} und φ_{r2} vor, möglichst eine knapp nördlich unseres vermuteten Standortes, der andere etwas südlich. Setzen wir die in (3.5) ein und lösen nach LHA auf, erhalten wir die Stundenwinkel LHA_{r1} und LHA_{r2} und daraus die zugehörigen Rechenlängen

$$\lambda_r = LHA_r - GHA = \pm \arccos\left(\frac{\sin(H) - \sin(\delta) \sin(\varphi_r)}{\cos(\delta) \cos(\varphi_r)}\right) - GHA \quad (8.3)$$

Da der Kosinus symmetrisch ist, liefert der Arkuskosinus immer zwei Lösungen mit beiden Vorzeichen. Damit sie nicht vergessen werden, haben wir die beiden Vorzeichen explizit dazu geschrieben. Die beiden Lösungen sind natürlich die zwei möglichen Schnittpunkte, die ein Breitenkreis mit dem Kreis der Höhengleiche haben kann. Welches der beiden Vorzeichen das richtige ist, finden wir einfach heraus: liegt das Gestirn im Osten, muss $LHA_r < 0$ sein, liegt es im Westen muss $LHA_r > 0$ sein.

Es gibt natürlich auch Breitenkreise, die mit dem Kreis der Höhengleiche gar keinen Schnittpunkt haben. Haben wir zufällig eine entsprechende Rechenbreite gewählt, merken wir das in der Rechnung daran, dass der Betrag des Arkuskosinus in (8.3) größer als eins wird. Wir wählen dann eine neue Breite, die dichter an der Deklination *Dec* des Gestirns liegt.

Die beiden Koordinaten der Rechenorte $(\lambda_{r1}, \varphi_{r1})$ und $(\lambda_{r2}, \varphi_{r2})$, die wir so erhalten, tragen wir in die Karte oder die Plottingsheet ein und verbinden sie durch eine Gerade, unsere Standlinie. Beachte, dass sich bei der Berechnung von (8.3) für die beiden Rechenpositionen immer nur die Rechenbreite φ_r ändert, die anderen Terme müssen nur einmal berechnet werden und können dann für beide Rechenpositionen verwendet werden.

Die so gewonnene Standlinie ist eine Sekante an den Kreis der Höhengleiche. In Abb. 29 haben wir das Ergebnis noch einmal dargestellt. Der besseren Sichtbarkeit wegen liegen die vorgewählten Breitenwerte recht weit auseinander, so dass der Unterschied zwischen der gekrümmten Höhengleiche und der approximierenden Standline deutlich wird. Mit zunehmendem Abstand der Rechenbreiten und auch mit auch zunehmendem Abstand der wahren Position von diesen Breiten wird der Fehler der Approximation der Höhengleiche durch eine Standlinie immer größer. Da dieser Fehler beim Verfahren von St. Hilaire noch etwas kritischer ist, besprechen wir ihn dort ausführlicher.

Es kann vorkommen, dass wir uns bei der Wahl der Rechenbreiten erheblich verschätzen und unser Standpunkt erheblich von den Rechenpositionen abweicht. In diesem Fall ersetzen wir die am weitesten entfernte Rechenbreite durch eine Näherliegende, berechnen die neue Rechenposition und verbinden sie durch eine neue Standlinie mit derjenigen der alten Rechenpositionen, die noch am dichtesten an unserem vorläufig gefundenen Standort liegt. Mit dieser neuen Standlinie bekommen wir dann einen genaueren Standort. Im Zweifelsfall iterieren wir das Verfahren bis sich die Standlinie nicht mehr verbessern lässt.

Die Konstruktion nach Sumner funktioniert gut, wenn das beobachtete Gestirn mehr oder weniger im Westen oder Osten des Beobachters steht. Sie funktioniert nur schlecht, wenn das Gestirn nördlich oder südlich steht. Dann ist die Vorauswahl zweier Breitenkreise ungünstig. Da der später gefundene Standort möglichst zwischen den Breitenkreisen positioniert sein sollte, passiert es schnell, dass der eine Breitenkreis die Höhengleiche gar nicht mehr schneidet.

Was ist zu tun? Entweder gleich die Kulmination abwarten oder Sumners Idee leicht abändern, indem man die Rechenbreiten durch Rechenlängen ersetzt. Die Gleichung (3.5) muss jetzt bei gewähltem λ_r nach der Breite φ aufgelöst werden, was ein bisschen mehr Rechenaufwand bedeutet.

Für eine Rechenlänge λ_r berechnen wir zur der Uhrzeit der Messung den Greenwich Stundenwinkel GHA des Gestirns und damit den entsprechenden Stundenwinkel $LHA_r = GHA + \lambda_r$. Die folgenden Ausdrücke im Seitenkosinussatz (3.5)

$$a = \sin(\delta), \quad b = \cos(LHA_r) \cos(\delta), \quad c = \sin(H) \quad (8.4)$$

sind dann alle bekannt bzw. gemessen. (3.5) lautet mit diesen Abkürzungen

$$c = a \sin(\varphi) + b \cos(\varphi)$$

Diese Gleichung müssen wir nach φ auflösen. Dazu schreiben wir die rechte Seite mit dem Ansatz

$$a = A \sin(\varphi_0), \quad b = A \cos(\varphi_0)$$

um in (siehe Additionstheorem A.10)

$$c = A \cos(\varphi - \varphi_0) \text{ wobei } A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi_0 = \text{atan}\left(\frac{a}{b}\right),$$

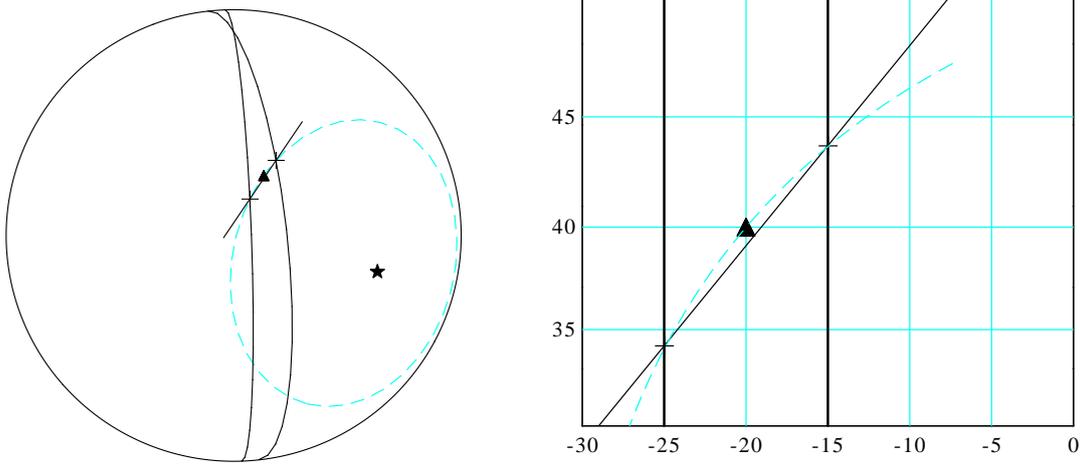


Abbildung 30: Konstruktion der Standlinie nach Sumner, diesmal mit vorgewählten Rechenlängen $\varphi_r = -25^\circ$ und -35° . Sonst wie in Abb. 29. Insbesondere gilt wieder, dass der Abstand der Rechenlängen viel größer ist, als man ihn in realen Fällen wählen würde.

Diese Gleichung läßt sich nun ohne Probleme nach φ auflösen.

$$\varphi = \varphi_0 \pm \operatorname{acos}\left(\frac{c}{A}\right)$$

Nach Wiedereinsetzen der Abkürzungen (8.4) erhalten wir mit kleinen Umformung nach Pythagoras $\sin^2(\delta) + \cos^2(\operatorname{LHA}_r) \cos^2(\delta) = 1 - \cos^2(\operatorname{LHA}_r) \sin^2(\delta)$ schließlich einen Ausdruck für die errechnete Breite

$$\boxed{\varphi_r = \operatorname{atan}\left(\frac{\tan(\delta)}{\cos(\operatorname{LHA}_r)}\right) \pm \operatorname{acos}\left(\frac{\sin(H)}{1 - \cos^2(\operatorname{LHA}_r) \sin^2(\delta)}\right)} \quad (8.5)$$

zur vorgewählten Rechenlänge λ_r bzw. dem Stundenwinkel LHA_r . Verbindet man die Rechenstandorte (λ_r, φ_r) für zwei Rechenlängen wie in Abb. 29, erhalten wir die Standlinie.

Diese Lösung ist nun schon etwas aufwendiger als das vergleichbare (8.3). Das doppelte Vorzeichen in (8.5) gibt wieder zwei Lösungen, denn ein Meridian schneidet den Höhenkreis zweimal oder aber gar nicht. Letzteres, wenn wir für das Argument des Arkuskosinus einen Betrag größer als eins errechnen. Wir haben dann die Rechenlänge λ_r in zu großem Abstand vom Bildpunkt des Gestirns gewählt. Im ersten Fall ist das Vorzeichen “+”, wenn das Gestirn südlich von uns beobachtet wurde und “-”, wenn es nördlich steht. (8.5) muss wie beim klassischen Sumner-Verfahren zweimal gelöst werden, diesmal für zwei Rechenlängen, also zwei verschiedene Werte für $\cos(\operatorname{LHA}_r)$. Die anderen Terme brauchen nur einmal berechnet und können wiederverwendet werden.

Der Spezialfall, dass wir genau die Kulmination des Gestirns beobachten, kommt aus (8.5) direkt heraus, denn dann ist $\operatorname{LHA}_r = 0$, $\cos(\operatorname{LHA}_r) = 1$ und (siehe Abb. 27)

$$\varphi = \delta \pm \operatorname{acos}(\sin(H)) = \delta \pm \left(\frac{\pi}{2} - H\right) \quad (8.6)$$

Die Standlinie ist dann der Breitenkreis φ . Wenn das Gestirn dicht, aber nicht genau bei der Kulmination beobachtet wurde, können wir, um Rechenarbeit zu sparen, eine der beiden Rechenlängen λ_r so wählen, dass $\operatorname{LHA}_r = 0$. Wir können dann die vereinfachte Lösung (8.6) zumindest einmal ausnutzen.

Zusammengefasst:

Standlinie nach Sumner, vorgegebene Breiten:	
Datum Gestirn	Uhrzeit UT1
Deklination δ	aus JB; $\sin(\delta)$, $\cos(\delta)$ im Taschenrechner abspeichern
Geozentr. Höhe H	beobachtet und reduziert; $\sin(H)$ im Taschenrechner abspeichern
Greenw. Sternzeit GST – Rektazension α	nur für Sterne; aus JB oder (4.2) nur für Sterne; aus JB
Greenw. Stdwinkel GHA	für Sterne; nach $GHA = GST - \alpha$; für Sonne, Mond, Planeten; aus JB
Rechenbreite 1 φ_{r1} Lokaler Stdwinkel LHA_{r1} Rechenlänge 1 λ_{r1}	wählen nach (8.3), $\pm \text{acos}$ Term aus $\lambda_{r1} = LHA_{r1} - GHA$
Rechenbreite 2 φ_{r2} Lokaler Stdwinkel LHA_{r2} Rechenlänge 2 λ_{r2}	wählen nach (8.3), $\pm \text{acos}$ Term aus $\lambda_{r2} = LHA_{r2} - GHA$

Standlinie nach Sumner, vorgegebene Längen:	
Datum Gestirn	Uhrzeit UT1
Deklination δ	aus JB; $\sin(\delta)$, $\cos(\delta)$ im Taschenrechner abspeichern
Geozentr. Höhe H	beobachte und reduziert; $\sin(H)$ im Taschenrechner abspeichern
Greenw. Sternzeit GST – Rektazension α	nur für Sterne; aus JB oder (4.2) nur für Sterne; aus JB
Greenw. Stdwinkel GHA	für Sterne; nach $GHA = GST - \alpha$; für Sonne, Mond, Planeten; aus JB
Rechenlänge 1 λ_{r1} Lokaler Stdwinkel LHA_{r1} Breite φ_c Breite φ_{\pm} Rechenbreite 1 φ_{r1}	wählen aus $LHA_{r1} = GHA + \lambda_{r1}$ nach (8.5), atan -Term nach (8.5), acos -Term nach (8.5), $\varphi_c \pm \varphi_{\pm}$
Rechenlänge 2 λ_{r2} Lokaler Stdwinkel LHA_{r2} Breite φ_c Breite φ_{\pm} Rechenbreite 2 φ_{r2}	wählen aus $LHA_{r2} = GHA + \lambda_{r2}$ nach (8.5), atan -Term nach (8.5), acos -Term nach (8.5), $\varphi_c \pm \varphi_{\pm}$

8.2 Standlinienverfahren nach St.Hilaire

Bei diesem Verfahren wird von einer angenommenen Rechenposition ausgegangen, d.h., es wird sowohl für die Länge und als auch für die Breite eine Vorauswahl getroffen. Mit diesem Rechenort können wir dann aus dem Kosinussatz (3.5) ohne Umformung eine Rechenhöhe H_r bestimmen, die wir an diesem Ort zur Zeit der Messung hätten beobachten müssen.

$$\boxed{H_r = \text{asin}(\sin(\delta) \sin(\varphi_r) + \cos(\text{LHA}_r) \cos(\delta) \cos(\varphi_r))} \quad (8.7)$$

Von den mehrdeutigen Lösungen des Arkussinus wird immer die im Bereich $[-\pi/2, \pi/2]$ gewählt. Ist H_r negativ, sollte uns das allerdings stutzig machen, denn wir hätten das Gestirn dann eigentlich gar nicht beobachten dürfen (siehe jedoch dazu Kapitel 8.5). Die Differenz zwischen der beobachteten zu der berechneten Höhe heißt Intercept $\Delta H = H - H_r$. Diese Differenz sollte natürlich möglichst klein ausfallen, andernfalls haben wir den Rechenort schlecht gewählt.

So wie wir den Intercept definiert haben, bedeutet ein positives ΔH , dass $H_r < H$, d.h. der Rechenort ist weiter vom Bildpunkt des Gestirns entfernt als unser wirklicher Standort. Bei negativem ΔH ist $H_r > H$ und wir haben den Rechenort zu dicht am Bildpunkt des Gestirns gewählt. Wir müssen also auf das richtige Vorzeichen des Interceptwertes achten.

Als nächstes errechnen wir den Azimutwinkel A , unter dem wir das Gestirn vom Rechenort gesehen hätten und benutzen dazu den Sinussatz (3.7)

$$\boxed{A = -\text{asin}\left(\frac{\cos(\delta)}{\cos(H_r)} \sin(\text{LHA}_r)\right)} \quad (8.8)$$

Hier müssen wir natürlich die für den Rechenort richtige Höhe H_r einsetzen, die wir gerade ausgerechnet haben und nicht die gemessene Höhe H . Den Stundenwinkel berechnen wir aus dem Greenwich Stundenwinkel und der Rechenlänge nach $\text{LHA}_r = \text{GHA} + \lambda_r$ entsprechend (4.3) oder (4.5). Wenn im Rechenort das Gestirn nicht gerade im Zenit steht ($H_r = \pi/2$), ist alles wohl definiert. Ein positiver Stundenwinkel LHA_r führt zu einem negativen $\sin(A)$, also $A \in [\pi, 2\pi]$ wie in der Zeichnung (9). Ein negativer Stundenwinkel LHA_r mit dem Gestirn im Westen des Rechenortes führt zu einem $A \in [0, \pi]$.

Wir müssen aber aufpassen, da der Arkussinus mehrdeutig ist: mit jedem A ist auch $\pi - A$ eine Lösung. Ob daher $|A| \in [0, \pi/2]$ oder $\in [\pi/2, \pi]$ die richtige Lösung ist, können wir aufgrund der Rechnung nicht entscheiden. Wir wählen den Lösungsquadrant statt dessen je nachdem, ob das Gestirn nördlich oder südlich des Rechenortes steht, d.h., ob $\delta > \varphi_r$ oder $\delta < \varphi_r$ ist. Diese Entscheidung ist besonders sorgfältig zu überprüfen, wenn für A ein Winkel in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ heraus kommt. Dann liegen die beiden zu $\pm \frac{\pi}{2}$ symmetrischen möglichen Lösungen dicht beieinander. Hier noch einmal die Fallunterscheidungen in der Übersicht:

		Gestirn westlich falls $\text{LHA}_r > 0$	Gestirn östlich falls $\text{LHA}_r < 0$
Gestirn nördlich	$\delta > \varphi_r$	$3\pi/2 < A < 2\pi$	$0 < A < \pi/2$
Gestirn südlich	$\delta < \varphi_r$	$\pi < A < 3\pi/2$	$\pi/2 < A < \pi$

(8.9)

Insgesamt ist diese Berechnung des Azimutwinkels aber nicht so kritisch wie es den Anschein hat. In den HO-Tafeln, die die Ergebnisse der Schritte (8.7) und (8.8) in kiloschweren, mehrbändigen Werken tabellieren, sind die Azimutwinkel nur auf ganzzahlige Grad angegeben. Mehr als Zeichengenauigkeit brauchen wir für A nicht.

Die Konstruktion der Standlinie ist in Abb.31 dargestellt. Wir erhalten sie, indem wir zunächst durch die gewählte Rechenposition (λ_r, φ_r , in Abb.31 mit \blacktriangledown bezeichnet) die Azimutlinie mit dem Winkel A gegen Nord zeichnen. Danach tragen wir auf der Azimutlinie von der Rechenposition aus die Interceptstrecke $R_\delta \Delta H = 60 \text{ sm} (\Delta H/1^\circ)$ ab. Hier ist das Vorzeichen wichtig: ist $\Delta H > 0$ muss die Strecke in Richtung auf das Gestirn gerichtet sein, da der Endpunkt der Interceptstrecke (in Abb. 31 mit $+$ bezeichnet) dann näher am Bildpunkt des Gestirns liegt und von ihm aus das Gestirn unter der beobachteten, größeren Höhe

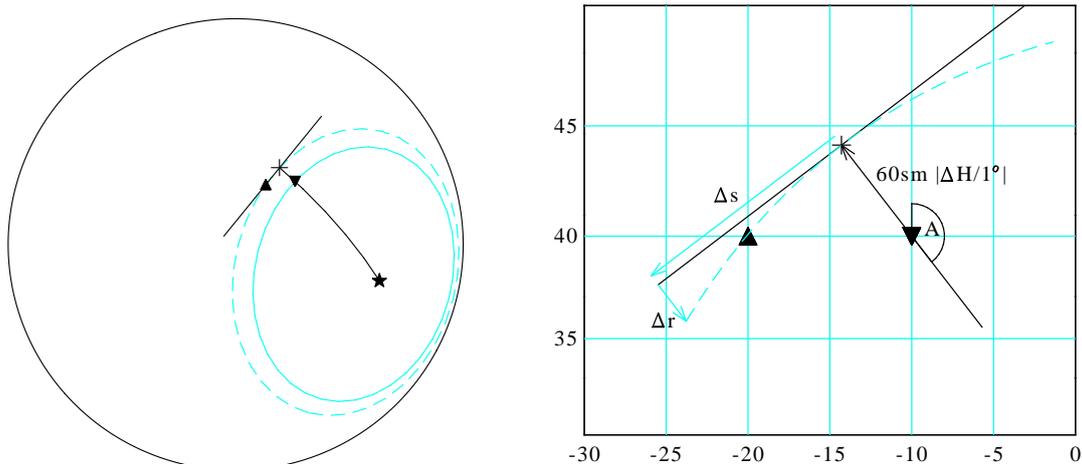


Abbildung 31: Konstruktion der Standlinie nach St.Hilaire auf der Erdkugel und in der Mercatorkarte dargestellt. Wie in Abb. 29 ist ▲ die Position des Beobachters, dessen gemessene wahre Höhe H für die Standlinienberechnung benutzt wurde, ▼ bezeichnet die vorgewählte Rechenposition, + den Endpunkt mit der Interceptentfernung von ▼ entlang der Azimutlinie, hier bei negativem ΔH . Die Senkrechte durch + ist schließlich die Standlinie. Die Rechenpostion hat einen für praktische Fälle einen viel zu großen Abstand von der wahren Position. Er wurde gewählt, um das Konstruktionsprinzip auch auf der Kugel noch sichtbar zu machen. Die wahre Höhengleiche ist gestrichelt dargestellt. Δs und Δr sind ein Abstand entlang der Standline und die Abweichung für diese Stelle de Standlinie von der wahren Höhengleiche.

$H_r + \Delta H = H$ gesehen wird. Ist $\Delta H < 0$ wie in dem Beispiel in Abb. 31, muss der Endpunkt (+) um $R_\delta |\Delta H| = 60 \text{ sm } |\Delta H/1^\circ|$ weiter vom Gestirn weg liegen als die Rechenposition, da eine geringere Höhe H als die Höhe H_r am Rechenort gemessen wurde. Wieder gilt: $R_\delta |\Delta H|$ ist die Länge der Strecke, wenn ΔH in Bogenmaß angegeben wird. Benutzen wir ΔH in Grad beträgt sie $60 \text{ sm } |\Delta H/1^\circ|$. Der Endpunkt (+) der Interceptstrecke ist nach dieser Konstruktion ein Punkt auf der wahren Höhengleiche. Als letztes zeichnen wir durch diesen Endpunkt eine Senkrechte zur Azimutlinie. Sie ist die gesuchte Standlinie, die in diesem Fall die Höhengleiche tangential annähert.

In Abb. 31 ist wieder wegen der besseren Sichtbarkeit die vorgewählten Rechenpostion in recht großem Abstand von der wahren Postion gewählt. Auf diese Weise zeigt die Konstruktion auch deutlich die Differenz zwischen der Höhengleiche (in Abb. 31 blau gestrichelt) und Standlinie (schwarz durchgezogen). Diese Abweichung Δr der Standlinie von der Höhengleiche wächst mit zunehmendem Abstand Δs entlang der Standlinie vom Endpunkt (+) der Interceptstrecke (siehe Abb. 31). Sie ist außerdem stark vom Radius $R_\delta (\pi/2 - H)$ der Höhengleiche und damit von der gemessenen Höhe H abhängig. Wir können die Abweichung für einen beliebigen Punkt auf der Standlinie leicht ein sphärisches Dreieck berechnen. Das Dreieck wird aus Bildpunkt des Gestirns, Schnittpunkt (+) von Azimutlinie und Standlinie und dem Punkt im Abstand Δs auf der Standlinie, für den wir den Fehler berechnen wollen, gebildet. Die Seiten dieses Dreiecks sind $\pi/2 - H$, Δs und $\pi/2 - H'$, wobei letzterer die fehlerhafte Zenitdistanz von unserem Punkt auf der Standlinie ist. Desweiteren kennen wir von diesem Dreieck noch einen Innenwinkel, nämlich den rechten Winkel in dem Schnittpunkt (+) von Azimutlinie und Standlinie, der der Seite $\pi/2 - H'$ gegenüber liegt. Der Seitenkosinussatz ergibt dann

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - H'\right) = \cos\left(\frac{\Delta s}{R_\delta}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - H\right) \quad \text{oder für den Abstand in Seemeilen}$$

$$\Delta r = 60 \text{ sm} \frac{(H' - H)}{1^\circ} = \frac{60 \text{ sm}}{1^\circ} \left(\text{asin}\left(\sin(H) \cos\left(\frac{1^\circ \Delta s}{60 \text{ sm}}\right)\right) - H \right) \quad (8.10)$$

$H \setminus \Delta s$	25	50	75	100	125	150	175	200
20°	0.03	0.13	0.30	0.53	0.83	1.19	1.62	2.12
30°	0.05	0.21	0.47	0.84	1.31	1.89	2.57	3.36
40°	0.08	0.30	0.69	1.22	1.91	2.74	3.74	4.88
50°	0.11	0.43	0.97	1.73	2.71	3.90	5.30	6.92
60°	0.16	0.63	1.42	2.52	3.93	5.66	7.70	10.05
70°	0.25	1.00	2.25	3.99	6.23	8.96	12.18	15.88

Tabelle 2: Abweichung der wahren Position von der Standlinie nach St.Hilaire in Abhängigkeit der gemessenen Höhe H (linke Spalte) und der Strecke Δs entlang der Standlinie von dem Punkt, der der angenommenen Position am nächsten kommt (obere Zeile). Die Abweichung liegt immer senkrecht zur Standlinie in Richtung auf das gemessene Gestirn zu. Alle Entfernungen in sm.

Während für die erste Zeile in (8.10) für H , H' und die trigonometrischen Funktionen das Bogenmaß gilt, ist in der zweiten Zeile H , H' in Grad einzusetzen, die trigonometrischen Funktionen erwarten Gradmaß als Argument und der Arkussinus liefert Winkel in Grad. Die Werte Δr sind in Tabelle 2 in Abhängigkeit von Δs und H aufgelistet, um ein Vorstellung dieser Abweichung zu geben. Die Werte der Tabelle gelten der Größenordnung nach auch für die Sumner-Linie, wenn für Δs der Abstand zu der nächstliegenden Rechenposition (λ_r, φ_r) eingesetzt wird.

Zusammengefasst:

Standlinie nach St.Hilaire:	
Datum	Uhrzeit UT1
Gestirn	
Deklination δ	aus JB; $\sin(\delta), \cos(\delta)$ im Taschenrechner abspeichern
Greenw. Sternzeit GST	nur für Sterne; aus JB oder (4.2)
–Rektazension α	nur für Sterne; aus JB
Greenw. Stdwinkel GHA	für Sterne nach $GHA = GST - \alpha$; für Sonne, Mond, Planeten aus JB
+ Rechenlänge λ_r	wählen
Lokaler Stdwinkel LHA_r	aus $LHA_r = GHA + \lambda_r$; $\sin(\varphi_r), \cos(\varphi_r)$ im Taschenrechner abspeichern
Rechenbreite φ_r	wählen, $\sin(\varphi_r), \cos(\varphi_r)$ im Taschenrechner abspeichern
Geozentr. Höhe H	beobachtet und reduziert
–Rechenhöhe H_r	aus (8.7)
Intercept ΔH	aus $h - H_r$; Vorzeichen beachten
Azimut A	nach (8.8), Fallunterscheidung nach (8.9)

8.3 Direkte Berechnung der Position aus zwei Höhenmessungen mit Hilfe von sphärischen Dreiecken

Statt das Ergebnis jeder einzelnen Beobachtung graphisch in Form einer Standlinie festzuhalten, können wir aus zwei Beobachtungen auch den Standpunkt direkt ausrechnen. Die vier Objekte: Pol (in Abb. 32 durch P gekennzeichnet), Beobachter (\blacktriangle) und die Bildpunkte der beiden Sterne ($\ast 1$ und $\ast 2$) können

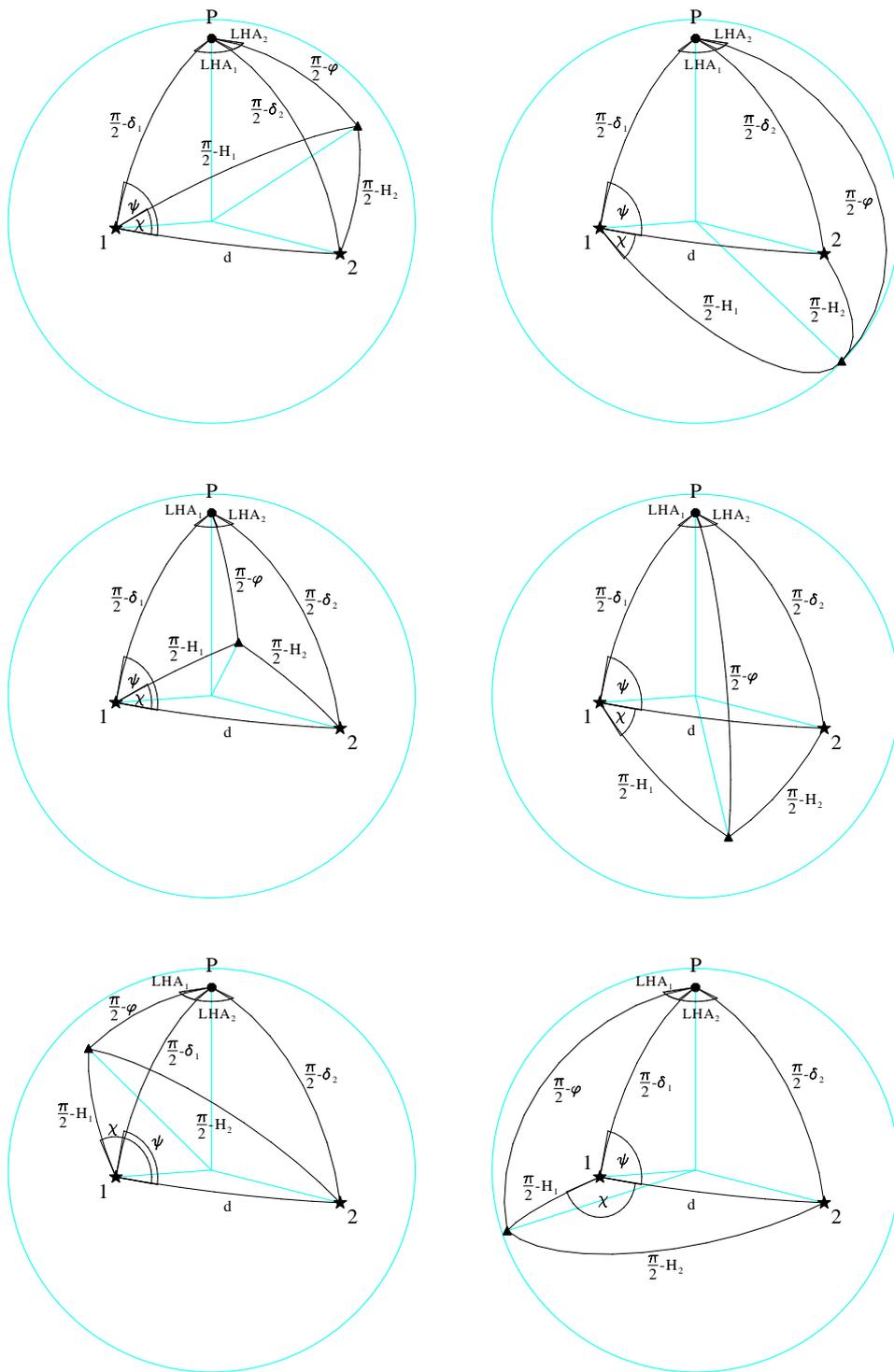


Abbildung 32: Zur Berechnung der Position des Beobachters (\blacktriangle) aus zwei Höhenmessungen H_1 und H_2 . Die Bildpunkte der Sterne stehen bei $\star 1$ und $\star 2$. Links der Fall, dass der Beobachter nördlich des Großkreises steht, der die beiden Sternörter verbindet, rechts der Fall, dass er südlich dieses Großkreises steht. Von oben nach unten die Fälle $LHA_1 < LHA_2 < 0$, $LHA_1 < 0 < LHA_2$ und $0 < LHA_1 < LHA_2$

wir wechselseitig zu vier sphärischen Dreiecken kombinieren (siehe Abb. 32). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass Stern 1 der westlichere der Sterne ist. Eine weitere Annahme ist, dass der Beobachter (\blacktriangle) wie in Abb. 32 einen Stern im Westen und einen im Osten hat.

Haben wir die Sternörter bestimmt, so sind von dem Dreieck, das vom Pol und den Bildpunkten der Sterne 1 und 2 gebildet wird, alle Eckkoordinaten bekannt. Der Abstand zwischen den Sternen ist dann nach dem Seitenkosinussatz (D.2)

$$\cos(d) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_2\right) \cos(\text{LHA}_1 - \text{LHA}_2) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta_2\right) =$$

$$\boxed{\cos(d) = \sin(\delta_1) \sin(\delta_2) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \cos(\delta_1) \cos(\delta_2)}$$
 (8.11)

In (8.11) haben wir die Differenz der Stundenwinkel $\text{LHA}_2 - \text{LHA}_1$ durch die gleich große Differenz der Rektazensionen $\alpha_2 - \alpha_1$ ersetzt. Für die Sonne, Mond oder Planeten kann statt $\alpha_2 - \alpha_1$ genauso gut die Differenz der Greenwich Stundenwinkel $\text{GHA}_2 - \text{GHA}_1$ aus dem Jahrbuch eingesetzt werden.

Damit kennen wir alle Seitenlängen dieses Dreiecks. Wir benutzen den nächsten Seitenkosinussatz, um einen Innenwinkel ψ des Dreiecks, z.B. beim Bildpunkt des Sterns 1, zu berechnen

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_2\right) = \cos(d) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right) \cos(\psi) + \sin(d) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right) \quad \text{oder}$$

$$\boxed{\psi = \text{acos}\left(\frac{\sin(\delta_2) - \sin(d) \cos(\delta_1)}{\cos(d) \sin(\delta_1)}\right)}$$
 (8.12)

Als nächstes betrachten wir das Dreieck, das aus dem Beobachters (\blacktriangle) und den Bildpunkten der Sterne 1 und 2 gebildet wird. Haben wir die Höhen H_1 und H_2 der beiden Sterne vom Ort des Beobachters gemessen, so sind wieder alle Seiten des Dreiecks bekannt und wir können wie oben den Innenwinkel χ beim Bildpunkt des Sterns 1 mit dem Seitenkosinussatz berechnen:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - H_2\right) = \cos(d) \cos\left(\frac{\pi}{2} - H_1\right) \cos(\chi) + \sin(d) \sin\left(\frac{\pi}{2} - H_1\right) \quad \text{oder}$$

$$\boxed{\chi = \text{acos}\left(\frac{\sin(H_2) - \sin(d) \cos(H_1)}{\cos(d) \sin(H_1)}\right)}$$
 (8.13)

Die Mehrdeutigkeit des Arkuskosinus bei der Berechnung der Winkel ψ und χ können wir getrost ignorieren und uns jeweils auf den Bereich $[0, \pi]$ beschränken.

Aus ψ und χ können wir jetzt beim Bildpunkt des Sterns 1 den Innenwinkel des Dreiecks mit den Eckpunkten Beobachter (\blacktriangle), Bildpunkten des Sterns 1 und Pol berechnen. Wir müssen dabei aber die Fälle, wie sie in Abb. 32 dargestellt sind, unterscheiden. Die Bildpunkte der Sterne liegen auf einem Großkreis und falls der Beobachter nördlich oder südlich dieses Großkreises steht, gibt es eine unterschiedlich Beziehung für den Innenwinkel. Wir erhalten je nach dem Vorzeichen der lokalen Stundenwinkel der Sterne und je nachdem, ob der Betrachter nördlich oder südlich des Großkreises steht, für den Innenwinkel:

	N des Großkreiß	S des Großkreiß
$\text{LHA}_1 > \text{LHA}_2 > 0$	$\psi - \chi$	$\psi + \chi$
$\text{LHA}_1 > 0 > \text{LHA}_2$	$\psi - \chi$	$\psi + \chi$
$0 > \text{LHA}_1 > \text{LHA}_2$	$\chi - \psi$	$2\pi - (\psi + \chi)$

Dabei haben wir angenommen, dass Stern 1 immer der mit dem größeren Stundenwinkel ist und damit westlich von Stern 2 steht.

Da der Kosinus symmetrisch ist, bekommen wir aus dem Seitenkosinussatz (D.2) unabhängig von den Vorzeichen der Stundenwinkel die Breite des Betrachters

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - H_1\right) \cos(\psi \mp \chi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - H_1\right) \quad \text{oder}$$

$$\boxed{\varphi = \text{asin}\left(\sin(\delta_1) \sin(H_1) \cos(\psi \mp \chi) + \cos(\delta_1) \cos(H_1)\right)}$$
 (8.14)

Die beiden Vorzeichen hängen nur von der Position des Betrachters nördlich (“-”) oder südlich (“+”) des Großkreises ab. Beide Vorzeichen ergeben eine gültige Lösung. Mit dem Vorzeichen wählen wir einen der beiden Schnittpunkte aus, den zwei überlappende Großkreise immer mit einander bilden. Sollte aus (8.13) $\chi = 0$ herauskommen, so liegt der Ort des Betrachters genau auf dem Großkreis der beide Sterne mit einander verbindet. Die Mehrdeutigkeit des Arkussinus in (8.14) ist unproblematisch, denn φ muss im Bereich $[-\pi/2, \pi/2]$ liegen und in diesem Bereich gibt es immer nur eine Lösung. Hat das Argument des Arkussinus in (8.14) einen Betrag größer als eins, haben wir etwas falsch gemacht: die zwei Höhengleichungen schneiden sich überhaupt nicht.

Die Länge erhalten wir dann über den Sinussatz für das gleiche Dreieck. Da der Innenwinkel im Bildpunkt des Sterns 1 jetzt als Argument des Sinus vorkommt, müssen wir die Vorzeichen in der obigen Tabelle beachten und damit zusätzlich unterscheiden, ob LHA_1 größer oder kleiner als null ist.

$$\frac{\sin(LHA_1)}{\sin(\frac{\pi}{2} - H_1)} = \frac{\text{sign}(LHA_1) \sin(\psi \pm \chi)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \quad \text{oder}$$

$$\lambda = LHA_1 - GHA_1 = \text{sign}(LHA_1) \text{asin}\left(\frac{\cos(H_1)}{\cos(\varphi)} \sin(\psi \mp \chi)\right) - GHA_1 \quad (8.15)$$

Die Mehrdeutigkeit des Arkussinus in (8.15) ist schon etwas problematischer. Mit jeder Lösung LHA_1 ist auch $\pi - LHA_1$ eine Lösung. Haben wir ein grobe Vorstellung von unserer richtigen Länge, ist es meist eindeutig, welche der beiden Lösungen die richtige ist. Liegt LHA_1 nahe bei $\pi/2$, kann die Unterscheidung jedoch schwierig werden. Zur eindeutigen Überprüfung gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste wäre, wir wiederholen die Schritte ab (8.12), jedoch für die Winkel ψ und χ versetzt an den Bildpunkt des Sterns 2, in der Hoffnung, dass die Lösung für LHA_2 eindeutiger identifiziert werden kann. Die effektivere Möglichkeit besteht darin, statt des Sinus- einen Seitenkosinussatz des Dreiecks aus Pol (P), Bildpunkt 1 und Beobachter (\blacktriangle) zu benutzen

$$\cos(\frac{\pi}{2} - H_1) = \cos(LHA_1) \sin(\frac{\pi}{2} - \delta_1) \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) + \cos(\frac{\pi}{2} - \delta_1) \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) \quad \text{oder}$$

$$\lambda = LHA_1 - GHA_1 = \text{acos}\left(\frac{\sin(H_1) - \sin(\delta_1) \sin(\varphi)}{\cos(\delta_1) \cos(\varphi)}\right) - GHA_1 \quad (8.16)$$

Aus der Kenntnis von $\sin(LHA_1)$ und $\cos(LHA_1)$ läßt sich im Zweifelsfall LHA_1 eindeutig bestimmen.

Zusammengefasst:

Position aus zwei Höhenmessungen:	
Datum	ungefähre Breite φ
FüG	in der Zeit zwischen den Messungen
KüG	in der Zeit zwischen den Messungen
Uhrzeit UT1 t_2	Gestirn 2
- Uhrzeit UT1 t_1	Gestirn 1
Δt	
Versegelung i.d. Breite $\Delta\varphi$	mit Δt nach (8.1) und (8.2)
Versegelung i.d. Länge $\Delta\lambda$	mit Δt nach (8.1) und (8.2)
geozentr. Höhe H_2	beobachtet und reduziert;
	sin, cos im Taschenrechner abspeichern
geozentr. Höhe H_1	beobachtet und reduziert;
	sin, cos im Taschenrechner abspeichern
Deklination δ_2	aus JB zur Zeit t_2 ; sin, cos
	im Taschenrechner abspeichern

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von vorheriger Seite	
Deklination $\delta_1(t_1)$ + Versegelung $\Delta\varphi$	aus JB zur Zeit t_1
korrr. Deklination δ_1	sin, cos im Taschenrechner abspeichern
für Sterne:	
Rektazension α_2	aus JB zur Zeit t_2
– Rektazension α_1	aus JB zur Zeit t_1
– Versegelung $\Delta\lambda$	
$\Delta\alpha$	cos abspeichern
für Sonne, Mond, Planeten:	
Greenw Stundenw. GHA_2	aus JB zur Zeit t_2
– Greenw Stundenw. GHA_1	aus JB zur Zeit t_1
+ Versegelung $\Delta\lambda$	
ΔGHA	cos abspeichern
Gestirnsabst. d	nach (8.11) mit $\cos(\Delta\alpha)$ oder $\cos(\Delta GHA)$; sin, cos im Taschenrechner abspeichern
Innenwinkel bei Gestirn i	$i = 1$ oder 2 auswählen, siehe Text
Innenwinkel ψ	bei Stern i nach (8.12)
\pm Innenwinkel χ	bei Stern i nach (8.13)
$\psi \pm \chi$	sin, cos im Taschenrechner abspeichern
Breite φ	mit δ_i, H_i nach (8.14); sin, cos im Taschenrechner abspeichern
Greenw. Sternzeit GST	nur für Sterne; aus JB oder (4.2) zur Zeit t_i
– Rektazension α_i	nur für Sterne; von Stern i
Greenw. Stw. $GHA_i(t_i)$	nur für Sterne aus GST – α_i ; für Sonne, Mond, Planeten direkt aus JB zur Zeit t_i
– Versegelung $\Delta\lambda$	falls $i=1$, sonst 0
korrr. Greenw. Stw. GHA_i	
Lokaler Stw. zu Gestirn i LHA	mit H_i, δ_i nach (8.15)
– korrr. Greenw. Stw. GHA_i	
Länge λ	

In dem obigen Schema haben wir vorgesehen, dass eine gewisse Strecke zwischen den Messungen versegelt wurde. Da wir hier keine Standlinien zeichnen, muß diese Strecke berücksichtigt werden, indem wir den Bildpunkt des früher gemessenen Gestirns 1 um diese Strecke versetzten Östliche Längen und Versegelung nach Osten sind immer positiv, westliche Längen und Versegelung nach Westen negativ. Sollten statt Sterne andere Himmelskörper gemessen worden sein, kann der Greenwich Stundenwinkel direkt aus dem Jahrbuch entnommen werden, die Berechnung der Sternzeit ist dann überflüssig.

8.4 Direkte Berechnung der Position aus zwei Höhenmessungen mit Hilfe von Vektorrechnung (noch unvollst.)

Wer an den obigen Mehrdeutigkeiten der inversen trigonometrische Funktionen verzweifelt, dem sei hier noch ein Alternative ans Herz gelegt. Statt transzendenten Gleichungen des Nautische Dreiecks durch Umformung aufzulösen, gehen wir mit einem “globalen Blick” an die Sache heran, unter weitgehender

Vermeidung eines expliziten Koordinatensystems. Damit umgehen wir \arccos und \arcsin , jedoch müssen wir jetzt mit Vektoren rechnen.

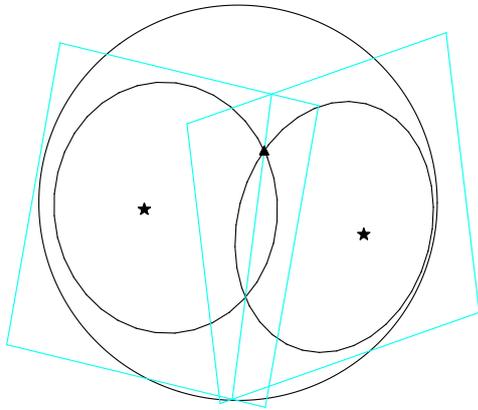


Abbildung 33: Schnittpunkt zweier Höhengleichen aus der Schnittgeraden der zugehörigen Höhengleichen. Die beiden möglichen Standorte liegen dort, wo die Schnittgerade die Kugeloberfläche durchstößt.

Ohne explizite Koordinaten zu benutzen, können wir den Kreis der Höhengleiche auch als Schnittlinie einer Ebene mit der Kugeloberfläche der Erde ansehen (Abb. 33). Da es für das Endergebnis vollkommen ohne Belang ist, welchen Radius die Erde hat, führen wir unsere Rechnung für eine Erde mit dem Radius 1 durch, Vektoren \mathbf{e} sind dann jeweils Einheitsvektoren mit der Länge 1. Die Ebenengleichungen, die dann die jeweilige Höhengleiche bestimmen, lauten dann bei gemessenen Höhen H_1 und H_2 der Himmeskörper 1 und 2

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1 = \sin(H_1) \quad \text{und} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2 = \sin(H_2) \quad (8.17)$$

Alle Vektoren \mathbf{r} der Länge 1, die je eine der Gleichungen erfüllen, bilden die Höhengleiche. Die Vektoren der Länge 1, die beide Gleichungen erfüllen, sind unser möglicher Standort. Im allgemeinen, gibt es nur zwei (oder keinen) solcher Vektoren. Der Ort der Beobachtung erfüllt also zwei Bedingungen: er liegt auf der Kugeloberfläche mit dem Radius 1 und auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen (8.17). Wir lösen zunächst die letzte Bedingung auf, dann die erste und ersparen uns mit dieser Reihenfolge viel Rechenarbeit.

Die Schnittgerade muss senkrecht zu den Flächennormalen verlaufen, also in der Richtung von $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$. Wir brauchen jetzt nur noch irgend einen Punkt \mathbf{r}_0 auf der Schnittgeraden. Den legen wir so fest, dass er in der Ebene liegt, die von \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 aufgespannt wird (das ist genau die Großkreisebene, die die Sterne 1 und 2 bilden und die wir in Kapitel Solve2Sph für die Fallunterscheidung benötigt haben).

Einsetzen des Ansatzes $\mathbf{r}_0 = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2$ in die Ebenengleichungen unter Berücksichtigung von $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(H_1) \\ \sin(H_2) \end{pmatrix}$$

Kürzen wir im Folgenden $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = c$ ab (c ist dann der Kosinus des Winkels d in (8.11), den die beiden Sternrichtungen miteinander bilden), erhalten wir als Lösung die Schnittgerade

$$\alpha = \frac{\sin(H_1) - c \sin(H_2)}{1 - c^2}, \quad \beta = \frac{\sin(H_2) - c \sin(H_1)}{1 - c^2}$$

$$\mathbf{r} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + t(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \quad t \in \mathbb{R} \quad (8.18)$$

Im nächsten Schritt müssen wir die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Einheitskugel finden. Wegen der Orthogonalität der ersten Terme mit dem letzten in (8.18) ergibt sich

$$1 = |\mathbf{r}| = (\alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2)^2 + t^2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2c\alpha\beta + t^2 s^2$$

Dabei ist die Länge von $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ gerade $s = \sqrt{1 - c^2}$, der Sinus des Winkels, den die beiden Sterne miteinander bilden. Auf das Vorzeichen brauchen wir keine Acht geben, es sind nur gerade Potenzen von s gefragt. Weiter ist

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{1}{s^4} (\sin^2(H_1) + c^2 \sin^2(H_2) - 2c \sin(H_1) \sin(H_2)) \\ \beta^2 &= \frac{1}{s^4} (\sin^2(H_2) + c^2 \sin^2(H_1) - 2c \sin(H_2) \sin(H_1)) \\ \alpha\beta &= \frac{1}{s^4} (\sin(H_1) \sin(H_2) (1 + c^2) - c(\sin^2(H_1) + \sin^2(H_2))) \quad \text{damit} \\ \alpha^2 + \beta^2 + 2c\alpha\beta &= \frac{1}{s^4} ((1 - 2c + c^2)(\sin^2(H_1) + \sin^2(H_2)) + 2\sin(H_1) \sin(H_2)) \\ &= \frac{1}{s^4} (1 - c)^2 (\sin(H_1) + \sin(H_2))^2\end{aligned}\tag{8.19}$$

Damit ergibt sich

$$t^2 = 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2c\alpha\beta}{s^2} = 1 - \frac{(1 - c)^2 (\sin(H_1) + \sin(H_2))^2}{s^6} = 1 - \frac{(\sin(H_1) + \sin(H_2))^2}{s^2(1 + c)^2}\tag{8.20}$$

Die beiden Positionen auf der Erdoberfläche lassen sich also in der Form (8.18) mit den Koeffizienten schreiben

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sin(H_1) - c \sin(H_2)}{1 - c^2} \\ \beta &= \frac{\sin(H_2) - c \sin(H_1)}{1 - c^2} \\ t &= \pm \sqrt{1 - \frac{(\sin(H_1) + \sin(H_2))^2}{(1 - c^2)(1 + c)^2}}\end{aligned}\tag{8.21}$$

Mit diesem Ergebnis können wir natürlich noch nicht viel anfangen. Die Positionen lassen sich aber in einem Koordinatensystem ausdrücken, wenn \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 darin ausgedrückt werden

In geographischen Koordinaten ausgedrückt sind die Sternpositionen gerade die Rektazension und der Greenwich Stundenwinkel und $c = \cos(d)$ mit d wie in (8.11). Die weiteren Koeffizienten folgen aus (8.21) und die Position als Vektor geschrieben folgt aus

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + t(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} \cos(\text{GHA}_1) \cos(\delta_1) \\ \sin(\text{GHA}_1) \cos(\delta_1) \\ \sin(\delta_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos(\text{GHA}_2) \cos(\delta_2) \\ \sin(\text{GHA}_2) \cos(\delta_2) \\ \sin(\delta_2) \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} \cos(\delta_1) \sin(\delta_2) \sin(\text{GHA}_1) - \cos(\delta_2) \sin(\delta_1) \sin(\text{GHA}_2) \\ -\cos(\delta_1) \sin(\delta_2) \cos(\text{GHA}_2) + \cos(\delta_1) \sin(\delta_2) \cos(\text{GHA}_1) \\ \cos(\delta_1) \cos(\delta_2) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{8.22}$$

Die geographische Breite ergibt sich dann aus den Komponenten r_x, r_y, r_z von \mathbf{r} zu $\lambda = \text{atan}(r_z / \sqrt{r_x^2 + r_y^2})$ und $\varphi = \text{asin}(r_y / r_x)$.

8.5 Auf- und Untergänge

Die Zeitpunkte des Gestirnsauf- und untergangs sind zwei Spezialfälle des allgemeinen Nautischen Dreiecks (Abb. 9) mit dem Wert für die Gestirnshöhe $h = 0$. Auch wenn der Kosinussatz sich in diesem Fall sehr vereinfacht, hat es seine Schwierigkeiten, diesen Moment in der Praxis genau abzugucken. Da wir so

dicht am Horizont die Refraktion am grössten ist, werden wir das Gestirn in dem Augenblick, indem die geozentrische Höhe gerade den Wert Null annimmt, immer noch knapp über dem Horizont sehen. Je nach atmosphärischen Bedingungen und Standhöhe beträgt die beobachtete Höhe über der Kimm dann etwa $+30'$, also etwa einen Sonnendurchmesser ($32'$ im Mittel).

Umgekehrt beträgt die geozentrische Höhe H für das beobachtete Auftauchen oder Verschwinden eines Himmelskörpers bei atmosphärischen Standardbedingungen und einer Augenhöhe von 0 m [4]

H	Gestirn	
$+0^{\circ}08'$	Mond	Auf/Abtauchen der Oberkante, wegen der Parallaxe steht er tiefer
$-0^{\circ}34'$	Sterne	gilt auch für Planeten
$-0^{\circ}50'$	Sonne	Auf/Abtauchen der Oberkante

Für die $32'$ ihres Durchmessers braucht die Sonne $2^{\text{m}}08^{\text{s}}$ um auf- oder unterzutauchen, wenn sie am Äquator senkrecht auf den Horizont trifft. Bei höheren Breiten verlängert sich diese Zeit aber erheblich (siehe unten). Aber selbst, wenn der Oberkante des Sonne unter dem Horizont verschwunden ist, werden noch höhere Schichten der Atmosphäre beleuchtet und das dort produzierte Streulicht läßt die Himmels-helligkeit erst langsam abklingen. Je nach Empfindlichkeit für diese Resthelligkeit gibt es verschiedene Definitionen der Dämmerungsdauer. Sie ist definiert als die Zeit zwischen dem Verschwinden der Oberkante der Sonne bis zu dem Zeitpunkt zu dem das Sonnenzentrum die folgenden geozentrischen Höhen erreicht hat.

-6°	Sonne	bürgerliche Dämmerung (Bürgersteige werden hochgeklappt)
-12°	Sonne	nautische Dämmerung (hell genug, um den Horizont noch ausmachen zu können)
-18°	Sonne	astronomische Dämmerung (dunkel genug, um das Sternteleskop aufzumachen)

Die Höhen sind negativ, da sie natürlich unter dem Horizont liegen. Diese Werte sind Konventionen und dürfen nicht allzu genau genommen werden. Die eigene Sehkraft und atmosphärische Sichtbedingungen können zu erheblichen Modifikationen führen. Die nautische Dämmerung nach der obigen Konvention dauert somit 48^{m} am Äquator und entsprechend länger auf höheren Breiten. In dieser Zeit ist der Horizont gerade noch auszumachen, die helleren Sterne aber auch, so dass wir in dieser Zeit Sternhöhen messen können.

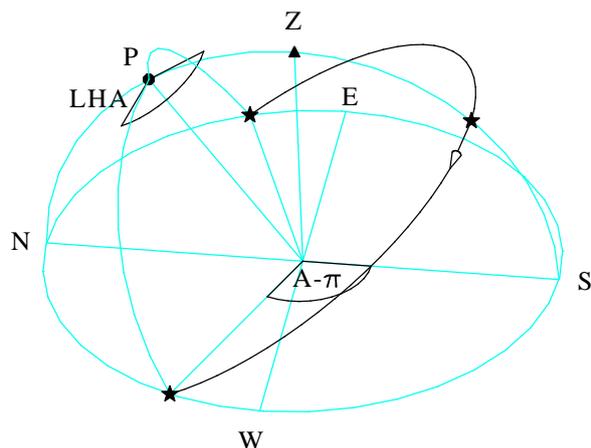


Abbildung 34: Bahn eines Himmelskörpers im Horizontalsystem. Die Sterne deuten den Aufgang, die Kulmination und den Untergang an. Es muss zwischen dem Stundenwinkel LHA und dem Azimut A unterschieden werden. Ihr Zusammenhang ist in (8.26) angegeben.

Setzen wir $h = 0$ in den Gleichungen (3.5), (3.6) und (3.7), erhalten wir Gleichungen für den Stun-

denwinkel LHA_0 und den Azimut A_0 zum Zeitpunkt des geometrischen Auf/Untergangs.

$$0 = \cos(LHA_0) \cos(\delta) \cos(\varphi) + \sin(\delta) \sin(\varphi) \quad \text{oder}$$

$$\boxed{\cos(LHA_0) = -\tan(\delta) \tan(\varphi)} \quad (8.24)$$

und $\sin(\delta) = \cos(A_0) \cos(\varphi)$ oder

$$\boxed{A_0 = \frac{\pi}{2} - \text{asin}\left(\frac{\sin(\delta)}{\cos(\varphi)}\right) \quad (\text{Aufgang}), \quad A_0 = \frac{3\pi}{2} + \text{asin}\left(\frac{\sin(\delta)}{\cos(\varphi)}\right) \quad (\text{Untergang})} \quad (8.25)$$

$$\boxed{\sin(|LHA_0|) \cos(\delta) = -\sin(H_0)} \quad (8.26)$$

Mit (8.24) können wir die Zeit des Auf- und Untergangs zumindest für Sterne direkt berechnen. Die Gleichung liefert, da der Kosinus symmetrisch ist, beide Stundenwinkel $\pm|LHA_0|$ für Auf- und Untergang. Ist die rechte Seite negativ, wird $|LHA_0| > \frac{\pi}{2}$. Ist sie positiv, z.B. bei einem Stern mit negativer Deklination beobachtet auf nördlicher Breite, wird $|LHA_0| < \frac{\pi}{2}$ und der Stern ist weniger als 12 Stunden sichtbar. Ist die rechte Seite kleiner als eins, geht der Stern gar nicht unter, ist sie größer als eins ist er auf der gegebenen Breite niemals sichtbar. Die Bedingungen für einen zirkumpolaren Stern bei der Breite ist also $\tan(\delta) \tan(\varphi) > 1$ oder mit (A.10) $\cos(\delta + \varphi) > 0$ bzw. $\delta + \varphi > \frac{\pi}{2}$.

Bei Sonne, Mond und Planeten hängt allerdings auch die Deklination etwas von der Zeit ab, und wir müssen die Auf- und Untergangszeit im Prinzip iterativ lösen, indem wir zunächst die Deklination für die ungefähre Zeit in (8.24) einsetzen, damit eine bessere Schätzung der Zeit berechnen, dann die Deklination korrigieren und wieder in (8.24) einsetzen, ... Meist reicht ein Iterationsschritt.

Gleichung (8.25) dient dazu, den Azimut zum Zeitpunkt des Auf- und Untergangs zu berechnen, um ihn z.B. für eine Kompasskontrolle zu benutzen. Dies wird besonders einfach, wenn wir einen Himmelskörper mit der Deklination 0 auswählen oder wir uns in der Nähe des Äquators befinden. Für Sterne mit verschwindender Deklination oder für die Sonne zur Zeit der Equinoxien ist $\delta=0$ und A_0 immer $\pi/2$ (Aufgang) oder $3\pi/2$ (Untergang) unabhängig von unserer eigenen Breite. In der Nähe des Äquators ist wiederum $\varphi \sim 0$ und damit wird $A_0 \sim \pi/2 - \delta$ (Aufgang) oder $3\pi/2 + \delta$ (Untergang).

Für höhere Breiten müssen wir genauer rechnen, aber auch die Azimutpeilung wird problematischer, weil die Himmelskörper sich unter einem immer flacheren Winkel Θ gegen den Horizont bewegen (Abb. 34). Der Azimut verändert sich dann deutlich mit der Zeit und wir müssen die Zeit der richtigen Kimmhöhe $h = 0$, immer genauer erwischen.

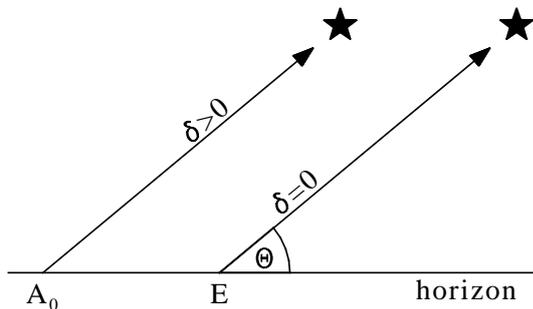


Abbildung 35: Graphische Veranschaulichung des Neigungswinkels Θ der sichtbaren Gestirnsbahn, hier beim Aufgang. Gestirne mit der Deklination $\delta = 0$ gehen immer genau im Osten auf, unabhängig von der eigenen Breite. Für andere Deklinationen ist der Azimut A_0 durch (8.25) gegeben.

Den Winkel Θ bekommen wir wieder aus (3.6). Wenn das Gestirn sich am Himmel bewegt, verändern sich hauptsächlich Azimut A und Höhe H . Die Deklination bewegt sich auch ein wenig, aber das wollen wir vernachlässigen. Das Verhältnis der zeitlichen Änderung dH/dt der Höhe zur zeitlichen Änderung

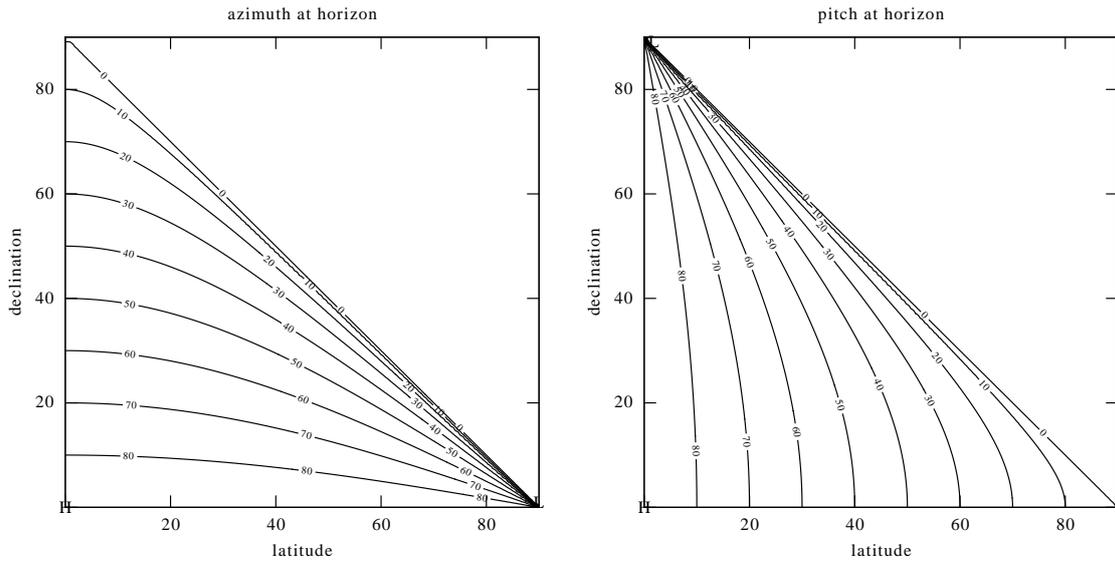


Abbildung 36: Links der Azimutwinkel eines Gestirns mit der Deklination δ beim Aufgang gesehen in der geographischen Breite φ , berechnet nach (8.25). Rechts der entsprechende Neigungswinkel Θ der sichtbaren Bahn gegen den Horizont, nach (8.27). Himmelskörper mit $\delta > \pi/2 - \varphi$ berühren denb Horizont überhaupt nicht. Für negative Deklinationen und Breiten kann das Diagramm entsprechend an der Ordinate bzw. Abzisse gespiegelt werden.

dA/dt des Azimuts ist dann gerade $\tan \Theta$. Ableiten von (3.6) nach der Zeit gibt eine Beziehung zwischen dH/dt und dA/dt , die wir nutzen können

$$0 = -\frac{dA}{dt} \sin(A) \cos(H) \cos(\varphi) - \frac{dH}{dt} \cos(A) \sin(H) \cos(\varphi) + \frac{dH}{dt} \cos(H) \sin(\varphi) \quad \text{oder}$$

$$\frac{dA}{dt} \sin(A) \cos(H) \cos(\varphi) = \frac{dH}{dt} (\cos(H) \sin(\varphi) - \cos(A) \sin(H) \cos(\varphi)) \quad \text{für } h = 0 \text{ folgt}$$

$$\boxed{\tan(\Theta) = \frac{dH/dt}{dA/dt} = \frac{\sin(A_0)}{\tan(\varphi)}} \quad (8.27)$$

Bei (8.27) ist auf des Vorzeichen acht zugeben: es wechselt beim überqueren des Äquators und von Auf- zu Untergang, entsprechend unserer Definition von Θ . Es ist aber klar, dass auf der Nordhalbkugel die Bahn immer nach Süden geneigt ist, auf der Südhalbkugel immer nach Norden.

Wie wir oben gesehen haben, haben Himmelskörper mit $\delta = 0$ am Horizont immer den Azimut $A_0 = \pi \pm \pi/2$, berühren den Horizont also immer unter dem Winkel $\Theta = \text{atan}(1/\tan \varphi) = \pi/2 - \varphi$. Bei niedrigen Breiten ist dagegen der Azimut z.B. beim Aufgang $A_0 \simeq \pi/2 - \delta$, und das gibt einen recht steilen Winkel $\Theta \simeq \text{atan}(\cos(\delta)/\tan(\varphi))$ für weite Bereiche von nicht zu großen Deklinationen δ , solange $\tan(\varphi)$ klein ist. Bei höheren Breiten wird Θ aber rapide flacher. Sie Sonne hat z.B. bei uns ($\varphi = 55^\circ$) im Hochsommer einen Azimut von $A_0 = 47^\circ$ zum Aufgang, das macht $\Theta = 27^\circ$. Eine Übersicht über den Azimut A_0 und die Bahnneigung Θ gegen den Horizont eines Himmelskörpers mit der Deklination δ die in der Breite φ beobachtet werden, ist in Abb. 36 dargestellt.

Für die Kompasskontrolle messen wir die Gestirns Höhe zur Zeit t_1 kurz vor dem Untergang. Mit allen Beschickungen erhalten wir eine beobachtete Höhe H . Der Zeitpunkt, wann $H = 0$ erreicht sein wird, liegt dann

$$\Delta t_1 = \frac{1^m}{15'} \frac{H}{\sin(|\Theta|)} \quad (8.28)$$

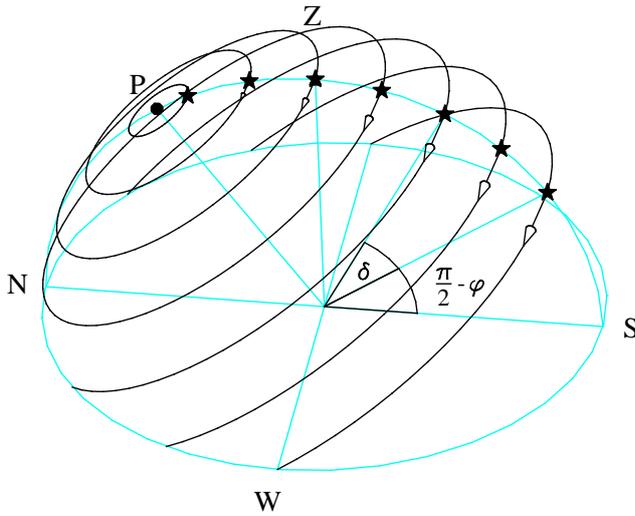


Abbildung 37: Scheinbare Bahnen von Sternen verschiedener Deklination δ für einen Beobachter auf der Breite φ . Der unterste Stern hat die Deklination $\delta = 0$, und geht genau im Osten auf und im Westen unter. Die anderen haben eine positive Deklination.

später als der Zeitpunkt t_1 der Höhenmessung. Peilen wir das Gestirn (oder auch seine Oberkante bei der Sonne) zu diesem vorhergesagten Zeitpunkt $t_0 = t_1 + \Delta t_1$ an, können wir den Wert A_0 von (8.25) direkt als Wert für die rechtweisende Peilung benutzen. Verpassen wir diesen Zeitpunkt und peilen statt dessen um t_2 so haben wir rechtweisend statt (8.25)

$$\text{rwP} = A_0 \pm 15' \frac{t_2 - t_0}{1\text{m}} \cos(\Theta) \quad (8.29)$$

rechtweisend gepeilt (+ für die Nord-, - für die Südhalbkugel). Da wir die Kompasspeilung selten genauer als ein Grad hinbekommen, müssen diese Korrekturen nur vorgenommen werden, wenn $\Delta t > 4^{\text{m}} \cos(\Theta)$.

Als Zusammenfassung dieses Kapitels gibt's ein Schema zur Kompasskontrolle (ohne Parallaxe Korrektur, daher nicht für den Mond geeignet) im Anhang H. Vereinfachtes Verfahren: wir peilen die auf- oder untergehende Sonne wenn ihr Zentrum $34'$, ihre Unterkante also $34' - 16' = 18' \sim$ etwa einen halben Sonnendurchmesser unter dem Horizont steht und benutzen (8.25) ohne weitere Korrekturen.

8.6 Meridiantransit und Kulmination

Eine einfache Methode, die Breite φ festzustellen, ist die Kulminationshöhe eines bekannten Sterns zu messen. Auf die Sonne angewandt heißt das Verfahren auch das Messen der Mittagsbreite. Kulminationshöhe wird jeweils zur Zeit des Transits erreicht, wenn der Stern den eigenen Meridian passiert und der Stundenwinkel LHA durch null geht (obere Kulmination) oder den Gegenmeridian und LHA den Wert 12^{h} (untere Kulmination). Himmelskörper mit der Deklination null erreichen bei der oberen Kulmination dann die Höhe $\pi/2 - \varphi$ (Abb. 37). Bei allgemeiner Deklination ist die Kulminationshöhe entsprechend auf der Nordhalbkugel um δ vergrößert und erreicht

$$H_{\text{trans}} = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta \quad (8.30)$$

über dem südlichen Horizont. Ist der Wert größer als $\frac{\pi}{2}$, wird er üblicherweise von π abgezogen und die entsprechende Höhe wird dann über dem Nordhorizont gemessen.

Der Himmelpol hat auf der Nordhalbkugel die Höhe φ über dem Nordhorizont. Ein Stern mit einer Deklination δ kreist um diesen Pol mit den Winkelabstand $\pi/2 - \delta$. Seinen tiefsten Punkt, die untere Kulmination, erreicht der Stern also im Norden mit einer Höhe

$$H_{\text{lowertrans}} = \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \quad (8.31)$$

Ist sie negativ, taucht der Stern unter den Horizont.

Die Gleichungen (8.30) und (8.31) gelten für die Nordhalbkugel. Für die Südhalbkugel müssen wir nur die Vorzeichen von δ und φ umkehren (siehe auch die beiden Vorzeichen in Gleichung 8.6). Die obere Kulmination ist dann natürlich über dem Nordhorizont zu sehen, die untere über dem Südhorizont.

Der Vorteil der Kulminationshöhenmessung ist, dass man ohne eine genaue Zeit auskommt, da das Gestirn in der Nähe des Meridiantransits $LHA = 0$ die Höhe nur wenig ändert. In früheren Zeiten, als es noch keine verlässlichen Schiffsuhren gab, war dies daher die gängige Methode der Breitenbestimmung. Dazu betrachten wir (3.5) in der Nähe der oberen Kulmination, also $LHA \simeq 0$, so dass $\cos(LHA) \simeq 1 - LHA^2/2$. Damit wird (3.5)

$$\begin{aligned}
\sin(H) &= \left(1 - \frac{LHA^2}{2}\right) \cos(\delta) \cos(\varphi) + \sin(\delta) \sin(\varphi) \\
&= \cos(\delta) \cos(\varphi) + \sin(\delta) \sin(\varphi) - \cos(\delta) \cos(\varphi) \frac{LHA^2}{2} \\
&= \cos(\delta - \varphi) - \cos(\delta) \cos(\varphi) \frac{LHA^2}{2} = \sin(H_{\text{trans}}) - \cos(\delta) \cos(\varphi) \frac{LHA^2}{2} \\
\text{Mit } \sin(H) - \sin(H_{\text{trans}}) &= 2 \sin \frac{1}{2}(H - H_{\text{trans}}) \cos \frac{1}{2}(H + H_{\text{trans}}) \\
&\simeq (H - H_{\text{trans}}) \cos(H_{\text{trans}}) \quad \text{folgt dann} \\
H - H_{\text{trans}} &= - \frac{\cos(\delta) \cos(\varphi)}{\cos(H_{\text{trans}})} \frac{LHA^2}{2} \tag{8.32}
\end{aligned}$$

Hier sind H und LHA in Bogenmaß anzugeben.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass der Himmelskörper eine gleichförmige Geschwindigkeit in Richtung wachsender Längengerade hat. Da wir die obige Gleichung nur für wenige Stunden in der Nähe der Kulmination benutzen, können wir für diese Geschwindigkeit getrost die mittlere Erddrehung von 15° pro Stunde annehmen. Ist t_{trans} der Zeitpunkt des Transits wird $LHA = \pi/12^{\text{h}} (t - t_{\text{trans}})$ und für H im Gradeinheiten lautet die Bahngleichung in der Nähe des Transits schließlich

$$\boxed{H - H_{\text{trans}} = - \frac{1' \pi c}{96} \left(\frac{t - t_{\text{trans}}}{1^{\text{m}}}\right)^2 \quad \text{mit } c = \frac{\cos(\delta) \cos(\varphi)}{\cos(H_{\text{trans}})}} \tag{8.33}$$

Die Näherung (8.33) wird natürlich unbrauchbar, wenn H_{trans} in die Nähe des Zenits liegt, da dann die Hilfskonstante c nicht mehr definiert ist. Wir beschränken uns daher auf eine Kulmination über dem Südhorizont.

Der Koeffizient c in (8.33) beschreibt die Krümmung der Gestirnsbahn gegen den SüdHorizont. Eine andere Form für c erhält man, wenn für H_{trans} (8.30) einsetzt.

$$\begin{aligned}
c &= \frac{\cos(\delta) \cos(\varphi)}{\cos(H_{\text{trans}})} = \frac{\cos(\delta) \cos(\varphi)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi + \delta)} = \frac{\cos(\delta) \cos(\varphi)}{\sin(\varphi - \delta)} = \\
&= \frac{\cos(\delta) \cos(\varphi)}{\sin(\varphi) \cos(\delta) - \cos(\varphi) \sin(\delta)} = \frac{1}{\tan(\varphi) - \tan(\delta)} \tag{8.34}
\end{aligned}$$

Als Beispiel betrachten wir die Sonne im Hochsommer mit $\delta = 23^\circ$ in unseren Breiten von $\phi = 55^\circ$. Die Sonne erreicht dann eine Kulminationshöhe (8.30) von 58° . Der Faktor c wird damit ziemlich genau 1. Wollen wir H_{trans} auf $1'$ folgt aus (8.33), dass wir t_{trans} auf $5^{\text{m}}.5$ genau treffen müssen.

Analoges trifft genauso für die untere Kulmination zu. Da dann die Bahn nach oben gekrümmt ist, muss in (8.33) das Minuszeichen durch ein Plus ersetzt werden und LHA durch $LHA - 12^{\text{h}}$, da die untere Kulmination ja einen halben Tag später stattfindet. Es kann also genauso gut die untere Kulmination eines Sternes gemessen werden, sofern die untere Kulminationshöhe (8.31) hinreichend hoch über dem Horizont bleibt.

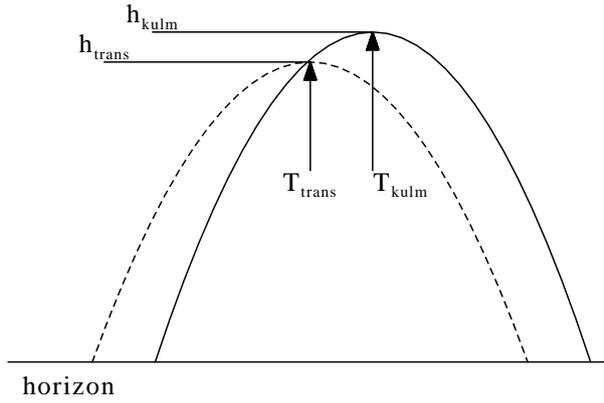


Abbildung 38: Scheinbare Bahnen einer virtuellen Sonne mit konstanter Deklination (gestrichelt) und der wahren Sonne bei anwachsender Deklination (durchgezogen). Die Zeit des Transit LHA = 0 ist für beide Himmelskörper t_{trans} , die virtuelle Sonne hat die Deklination der wahren Sonne im Moment des Transits.

Für den Fall der Sonne oder wenn wir uns selbst während der Messung in Nord-Süd-Richtung bewegen, müssen wir (8.33) jedoch ein wenig modifizieren, denn wir haben bisher angenommen, der Himmelskörper halte seine Deklination konstant. Im Frühjahr und Herbst verändert die Sonne ihre Deklination jedoch mit bis zu $1'$ pro Stunde. Bewegen wir uns selbst mit der Geschwindigkeit v und Kurs KüG, so nimmt die scheinbare, vom Boot aus sichtbare Höhe des Himmelskörpers im Transit mit $(1'/1\text{sm}) v \cos(\text{KüG})$ ab. Wir fassen beide Effekte zu einer scheinbaren Deklinationsänderung zusammen

$$\left(\frac{d\delta}{dt} \right)_{\text{app}} = \frac{d\delta}{dt} - \frac{1'}{1^{\text{h}}} \frac{v \cos(\text{KüG})}{1 \text{ kn}} \quad (8.35)$$

Eine Bootsgeschwindigkeit von 10 kn nach Norden, also von der Sonne weg, verringert den scheinbaren Deklinationszuwachs der Sonne also $10'$ pro Stunde.

Die Folge ist, dass wir zum genauen Zeitpunkt des Transits LHA = 0 gerade noch eine Höhenänderung beobachten, die mit der Deklinationsänderung $(d\delta/dt)_{\text{app}}$ übereinstimmt. Der Zeitpunkt der Kulmination verschiebt sich dann etwas gegen den des Transits t_{trans} auf die Zeit t_{kulm} und die beobachtete Kulminationshöhe ist nicht mehr genau (8.30) sondern eine zunächst noch unbekannte Höhe H_{kulm} (Abb. 38). Wir nehmen aber vereinfachend an, dass sich die Parabelform der Bahn in der Umgebung der Kulmination nicht merklich verändert. Somit gilt für in Verallgemeinerung zu (8.33)

$$H - H_{\text{kulm}} = -\frac{1'}{96} \left(\frac{t - t_{\text{kulm}}}{1^{\text{m}}} \right)^2$$

Aus der Bedingung $dh/dt = (d\delta/dt)_{\text{app}}$ zur Zeit des Transits $t = t_{\text{trans}}$ können wir die Zeitverschiebung der Kulmination bestimmen

$$\left(\frac{d\delta}{dt} \right)_{\text{app}} = -\frac{1'}{1^{\text{m}}} \frac{2\pi c}{96} \frac{t_{\text{trans}} - t_{\text{kulm}}}{1^{\text{m}}} \quad \text{oder} \quad \frac{t - t_{\text{kulm}}}{1^{\text{m}}} = -\frac{96}{60 \cdot 2\pi c} \left(\frac{d\delta/dt}{1'/1^{\text{h}}} \right)_{\text{app}}$$

Die beobachtbare Höhe der oberen Kulmination bekommen wir aus der Bedingung, dass wir beim Meridiandurchgang um $t = t_{\text{trans}}$ genau die Höhe $h = H_{\text{trans}}$ beobachten müssen:

$$H_{\text{trans}} - H_{\text{kulm}} = -\frac{1'}{96} \left(\frac{t_{\text{trans}} - t_{\text{kulm}}}{1^{\text{m}}} \right)^2 = -\frac{1' \cdot 96}{(2 \cdot 60)^2} \left(\frac{d\delta/dt}{1'/1^{\text{h}}} \right)_{\text{app}}^2$$

Damit erhalten wir schließlich statt (8.33) für den Fall veränderlicher Deklination nun die leicht

verschobene Kulminationsparabel

$$\begin{aligned}
 h - H_{\text{kulm}} &= -\frac{1' c\pi}{96} \left(\frac{t - t_{\text{kulm}}}{1^{\text{m}}} \right)^2 \\
 t_{\text{kulm}} &= t_{\text{trans}} + \frac{0^{\text{m}} 8}{c\pi} \left(\frac{d\delta/dt}{1'/1^{\text{h}}} \right)_{\text{app}} \\
 H_{\text{kulm}} &= H_{\text{trans}} + \frac{1'}{150c\pi} \left(\frac{d\delta/dt}{1'/1^{\text{h}}} \right)_{\text{app}}^2
 \end{aligned}
 \tag{8.36}$$

Bei $d\delta/dt_{\text{app}} = 10'/1^{\text{h}}$ verschiebt sich die Kulmination um $t_{\text{kulm}} - t_{\text{trans}} = 2^{\text{m}} 5$. Innerhalb des $\sim 5^{\text{m}}$ Intervalls um die Zeit t_{trans} des Transits fällt dieser kleine Zeitunterschied also nicht sonderlich auf. Auch die Höhe der Kulmination erhöht sich kaum messbar um $H_{\text{kulm}} - H_{\text{trans}} = 1.3''$ und ist wegen der flachen Bahn in der Nähe der Kulmination vollkommen vernachlässigbar.

Auch wenn die Kulmination einige Minuten anhält, sollten wir t_{kulm} vorrausberechnen, damit wir sie nicht verpassen. Nehmen wir an, wir stehen um t_0 bei der Länge λ_0 und Breite φ und machen eine Geschwindigkeit v mit Kurs KüG. Dann verändern sich die Länge des Himmelskörpers und die unseres Standortes mit der Zeit t gegenüber den Positionen zur Zeit t_0

$$\text{GHA} = \text{GHA}_0 + \frac{15^\circ}{1^{\text{h}}} (t - t_0), \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{1'}{1 \text{ sm}} \frac{v \sin(\text{KüG})}{\cos(\varphi)} (t - t_0)$$

Der Grund für den $\cos(\varphi)$ ist wieder die Kontraktion der Abstände zwischen den Längengeraden (siehe Gl. 2.2).

Da der Zeitraum, über den wir die Vorausberechnung machen, mehrere Stunden betragen und weiter als der Gültigkeitsbereich von (8.33) oder (8.36) reichen kann, müssten wir zumindest bei Planeten deren Eigenbewegung berücksichtigen. Sie führt zu einer Abweichung ihrer Längengewanderung von den oben angenommenen 15° pro Stunde. Wir wollen aber von dieser Komplikation absehen und im Folgenden nur die Sonne oder einen Stern als Beobachtungsobjekt zulassen. Unter diesen Vorausssetzungen ergibt sich die Zeit bis zum Transit $\text{LHA} = 0$ für die Sonne oder einen Stern

$$\begin{aligned}
 0 = \text{LHA} &= \text{GHA} + \lambda = \text{GHA}_0 + \lambda_0 + \left(\frac{15^\circ}{1^{\text{h}}} + \frac{1'}{1^{\text{h}}} \frac{v \sin(\text{KüG})}{1 \text{ kn} \cos(\varphi)} \right) (t_{\text{trans}} - t_0) \\
 &= \text{LHA}_0 + \frac{15^\circ}{1^{\text{h}}} \left(1 + \frac{v \sin(\text{KüG})}{900 \text{ kn} \cos(\varphi)} \right) (t_{\text{trans}} - t_0) \quad \text{oder}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{t_{\text{trans}} = t_0 - \frac{1^{\text{h}} \text{LHA}_0}{15^\circ b} \quad \text{mit} \quad b = 1 + \frac{v \sin(\text{KüG})}{900 \text{ kn} \cos(\varphi)}}
 \tag{8.37}$$

Im Zähler steht der Stundenwinkel $\text{LHA}_0 = \text{GHA}_0 + \lambda_0$ zur Zeit t_0 . Da wir die Rechnung tunlichst vormittags machen, ist er negativ und die Zeitverschiebung zu t_0 in (8.37) insgesamt positiv. Die Eigenbewegung im Nenner ist nur eine kleine Korrektur zu der Bewegung der Sonne. Fahren wir der Sonne mit $v = 10 \text{ kn}$ entgegen ($\text{KüG} = \pi/2$), verkürzt sich die Zeit $t_{\text{trans}} - t_0$ bis zur Kulmination gerade mal um den Faktor $1/b = 1/(1 + 1/90 \cos \varphi) \simeq 1 - 1/90 \cos \varphi$. In unseren Breiten $\varphi = 55^\circ$ gibt das 0.98. Wenn wir den Kulminationszeitpunkt 4 Stunden im voraus berechnen, macht das eine Verschiebung knapp 5^{m} aus, also gerade so viel, dass wir es an der Höhenmessung zu falschen Kulminationszeit bemerken würden.

Im Prinzip könnte man auch (8.37) umdrehen, die Zeit t_{trans} der Transits beobachten und dann die Länge $\lambda = -\text{GHA}$ zu dieser Zeit aus einem Nautischen Jahrbuch ablesen. Das funktioniert aber nicht, da sich der Zeitpunkt der Kulmination aus den oben angeführten Gründen nur sehr ungenau, bis auf $\pm 5^{\text{m}}$ messen lässt. Statt dessen misst man den Zeitpunkt t_1 , wenn die Sonne eine bestimmte Höhe $h < H_{\text{trans}}$ erreicht und dabei noch deutlich ansteigt, so dass der Zeitpunkt gut messbar ist. Nach der Kulmination wird der entsprechende Zeitpunkt t_2 gemessen, wenn der Sonne beim Abstieg wieder die gleiche Höhe H passiert. Da die Bahn der Sonne symmetrisch um den Kulminationszeitpunkt verläuft, ist die Mitte

zwischen den Zeiten t_1 und t_2 die Zeit der Kulmination. Diese Art der Längenbestimmung heißt auch die Methode der korrespondierenden Höhen.

Alternativ zu (8.35) können wir auch für jede zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 nach Süden versegelte Seemeile und jede Bogenminute, die die Sonne in dieser Zeit nach Norden gewandert ist die Alhidade des Sextanten unmittelbar vor der zweiten Messung um eine Winkelminute zu größeren Höhen hin verschieben. Eine nach Süden wandernde Sonne bzw. Versegelung noch Norden führt entsprechend zum umgekehrten Vorzeichen. In den Formeln ist in diesem Fall dann immer (8.35) zu null zu setzen, da wir den Sextanten jetzt so korrigiert haben, als würden wir beide Messungen auf gleicher Breite und bei konstanter Deklination der Sonne durchführen.

Unsere Länge zur Zeit des Transits war dann die Länge $\text{GHA}_{\text{trans}}$ der Sonne zu diesem Zeitpunkt. Den Zeitpunkt können wir nach (8.36) aus der Zeit der Kulmination $t_{\text{kulm}} = (t_2 + t_1)/2$ berechnen

$$\lambda(t_{\text{trans}}) = -\text{GHA}(t_{\text{trans}}) \quad \text{mit} \quad t_{\text{trans}} = \frac{1}{2}(t_2 + t_1) - \frac{0^{\text{m}}8}{c\pi} \left(\frac{d\delta/dt}{1'/1^{\text{h}}} \right)_{\text{app}} \quad (8.38)$$

Sind wir in der Zeit zwischen den Messungen gleichförmig weitergesegelt, können wir die Länge zum letzten Messzeitpunkt t_2 entsprechend koppeln.

$$\lambda_{1,2} = -\text{GHA}_{\text{trans}} + \frac{1^\circ}{60 \text{ sm}} \frac{v \sin(\text{KüG})}{\cos(\varphi)} (t_{1,2} - t_{\text{trans}}) \quad (8.39)$$

Die Breite bekommen wir natürlich wie oben besprochen durch Messung der Höhe zum Kulminationszeitpunkt $(t_2 + t_1)/2$ und (8.30). Haben wir die Höhenmessung zur Halbzeit $(t_2 + t_1)/2$ verpaßt, können wir die beiden Messungen zur Zeit t_1 und t_2 immer noch zur Standlinienberechnung nach dem modifizierten Sumner Verfahren benutzen. Die benötigten Stundenwinkel $\text{LHA}_{1,2}$ zur Zeit der Messungen sind leicht zu berechnen

$$\text{LHA}_{1,2} = b \frac{15^\circ}{1^{\text{h}}} (t_{1,2} - t_{\text{trans}}) \quad (8.40)$$

Die Breite kann dann zu den Zeitpunkten der Messungen direkt ohne Standlinienermittlung nach (8.5) berechnet werden. Hier ist natürlich in den beiden Fällen die jeweils aktuelle Deklination δ zu den Zeiten $t_{1,2}$ zu benutzen.

8.7 Nordstern

Der Polarstern (Polaris) im Sternbild Ursa Minor (kleine Bärin, häufig auch kleiner Wagen) steht zur Zeit ziemlich genau im Nordpol des Äquatorsystem. Wegen der Präzession wandert er langsam aus, aber für die nächsten 100 Jahre kann er noch gut als grobe Orientierung auf der Nordhalbkugel erhalten. Er steht, bezogen auf den “mean equator and equinox of J2000.0”, bei den Koordinaten $\alpha = 2^{\text{h}}31^{\text{m}}49^{\text{s}}$, $\delta = 89^\circ 16'$. Über einen Tag vollführt der Polarstern einen kleinen Kreis um den exakten Himmelspol mit einem Durchmesser von $44'$, dem Winkelabstand zum Himmelspol.

Die Höhe H_{Polaris} des Polarsterns ist somit bis auf diesen kleinen Winkel (und Präzessions- und Nutationskorrekturen) die Breite des Betrachters: $\varphi \simeq H$. Wollen wir die Breite genauer haben, müssen wir die kleine Kreisbewegung berücksichtigen. Da der Kreisradius klein ist, brauchen wir den Stundenwinkel nicht sehr genau und können auch die sphärische durch eine ebene Geometrie ersetzen.

In [1] gibt es Näherungsformeln niedriger Genauigkeit, in denen die Stellung des Polarstern zum Himmelspol berücksichtigt wird. Am Tag d des Jahre 2007 (der 1. Jan 2007 ist $d = 1$) zur Uhrzeit h UT1 ist sein Stundenwinkel für eine ungefähre Länge φ

$$\text{LHA} \simeq 59^\circ 43 + 0^\circ 984645 \left(d + \frac{h}{24} \right) + 15^\circ h + \lambda \quad (8.41)$$

Damit ist die Breite des Betrachters

$$\varphi = H_{\text{Polaris}} - 0^\circ 7035 \cos(\text{LHA}) \quad (8.42)$$

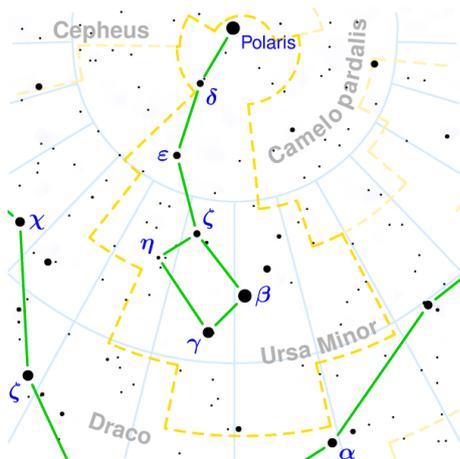


Abbildung 39: Sternbild Ursa Minor mit Polaris, dem α -Stern des Sternbildes.

Ist $LHA = 0$ steht der Polarstern gerade auf dem Meridianbogen des Betrachters, der Himmelpol liegt unter ihm, zwischen dem Polarstern und dem Horizont im Norden und die gemessene Höhe H ist um $0^\circ 7035$ zu groß. Einen halben Sterntag später steht der Polarstern zwischen Himmelpol und Horizont. Wir messen dann eine zu kleine Höhe H und in (8.42) wird $0^\circ 7035$ von H abgezogen. Dazwischen schwankt die Korrektur entsprechend dem Kosinus des Stundenwinkels.

Wenn wir die Breite φ auf $1' \simeq 0^\circ 02$ genau erhalten wollen, müssen wir den \cos in der kleinen Korrektur in (8.42) auf 2% genau errechnen, entsprechend brauchen wir LHA und φ nicht genauer als etwa 7° ermitteln.

9 HO-Tafeln

Die HO Tafeln sind ein Versuch, auch denjenigen, die mit \cos und \sin nichts am Hut haben wollen, die Lösung der Gleichungen (8.7) und (8.8) zu ermöglichen. Der Preis ist ein mehrbändiges Werk, in dem man für ganzgradige Stundenwinkel, Rechenbreiten und -längen die Höhe und den Azimut des Rechenortes nachschlagen kann.

Es tabelliert jeweils die Rechenhöhe H_r , genannt Alt_c und den Rechenazimut A , genannt Z , für einen Stundenwinkel $LHA_r = GHA + \lambda_r$, Rechenbreite φ_r und eine Deklination δ , genannt Dec . Der Rechenort ist dabei so zu wählen, dass LHA_r und φ_r ganzzahlig werden, die Deklination δ wird interpoliert. Die HO-Tafeln sind also für das Verfahren von Sumner nicht gut zu gebrauchen, denn dort wird nur die Breite vorgewählt. Die Länge bzw. LHA möchte man so genau wie möglich und nicht nur ganzzahlig erhalten.

Es gibt keine negative Deklination. Statt dessen werden spärliche Dreiecke mit negativer Deklination mit dem Südpol statt dem Nordpol gebildet (Abb. 40). Der berechneten Höhe H_r ist das gleich. Der berechnete Azimut A , der ja immer gegen die Nordrichtung gebildet wird, muss aber entsprechend dem unterdrückten Vorzeichen von δ und dem Wert bzw. Vorzeichen von LHA_r gespiegelt werden wie aus Abb. 40 ersichtlich.

Die Tafeln unterscheiden außerdem zwischen Ausgangswerten, bei denen φ und δ gleiches (“declination same name to latitude”) oder unterschiedliches (“declination contrary name to latitude”) Vorzeichen haben. Diese Dreiecke sind insofern verschieden als sie sich für den “contrary”-Fall über den Äquator erstrecken, im “same”-Fall nicht. In (3.5) gibt es im erstenen Fall ein effektives Minuszeichen auf der rechten Seite, im letzteren Fall werden die Beträge der beiden Terme auf der rechten Seite addiert.

Es gibt für jeden ganzzahligen Wert von φ_r je eine Seite für den same- und contrary Fall und für einen bestimmten Bereich der Deklination.

Dort sieht man unter der richtigen ganzgradigen Deklination und dem Wert LHA_r nach und findet Einträge für Alt_c , Z und d . Der Letzte ist die Differenz in Minuten der Rechenhöhe Alt_c zum nächsten

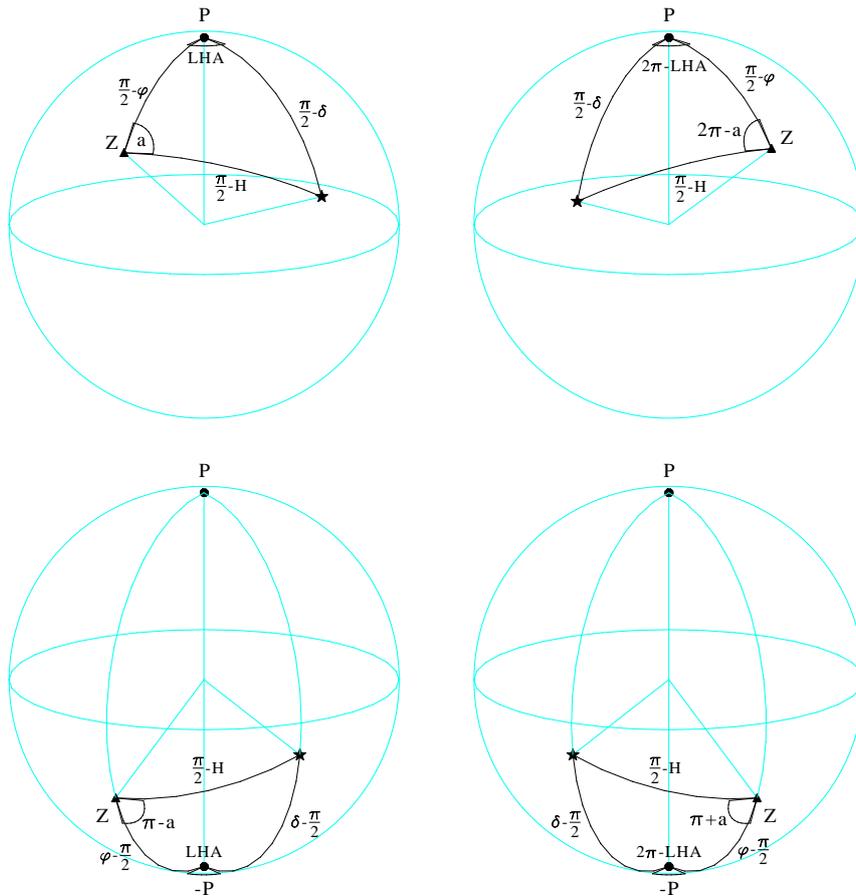


Abbildung 40: Die sphärischen Dreiecke, die in den HO-Tafeln eigentlich tabelliert sind, wenn der Bildpunkt des Sterns (*) auf der Nord- (oben) oder Südhalbkugel (unten) liegt bzw. $LHA \in [180, 360]$ (links) oder $\in [0, 180]$ (rechts). Entsprechend muss der tabellierte Innenwinkel beim Rechenort Z umgerechnet werden, um den wahren Azimut A zu erhalten.

ganzgradigen Deklinationswert. Interpoliert wird also, indem die Bogenminuten von δ durch 60 dividiert (gibt den Gradbruchteil) und mit d multipliziert werden. Die erhaltene Zahl ist dann der Zuschlag für $A_1 \tau_c$ in Bogenminuten. Wer sich diese Rechnung nicht zutraut, geht mit dem Wert d und den Bogenminuten der Deklination in eine neue Tabelle, wo der Zuschlag herausgesucht werden kann. Die Azimutablesung Z wird nicht interpoliert, denn wir brauchen ihn nur zum Zeichnen der Azimutlinie in unserer Plottingsheet. Ganze Gradzahlen reichen für die Zeichengenauigkeit aus. Dafür müssen, wie oben besprochen, je nach Fall 180° zuaddiert, Z von 180° oder 360° abgezogen oder aber gar nicht korrigiert werden:

$LHA_r \in$	$[0^\circ, 180^\circ]$	$[180^\circ, 360^\circ]$
δ, φ_r have same sign	$A_r = 360^\circ - Z^\circ$	$a_r = Z^\circ$
δ, φ_r have contrary sign	$a_r = 180^\circ - Z^\circ$	$A_r = 180^\circ + Z^\circ$

10 Kurzanleitung

Zeitmessung

- Gangkorrektur des Chronometers gegen Zeitzeichensender festhalten (positiv wenn Chronometer nachgeht, negativ wenn er vorgeht).
- Bei Chronometerzeit $h^h m^m 0^s$ die Stoppuhr starten.
- Im Moment der Höhenmessung die Stoppuhr stoppen.
- Messzeit ist $h^h m^m 0^s +$ Stoppuhrsekunden $+ Gangkorrektur$.

Höhenreduktion

- Indexbeschiebung Ib ablesen (positiv auf Vorbogen, negativ auf Hauptbogen)
- Wert H für Sonnenunterkante ablesen und Ib addieren gibt den Kimmabstand $H_{\text{Kimm}} = H + \text{Ib}$
- Auf Seite “Gesamtbeschiebung für den Kimmabstand des Sonnenunterrandes” Korrektur Gb entsprechend H_{Kimm} und Augeshöhe über NN ablesen
- Am unteren Rand der Seite bei “Zusatzbeschiebung für den Kimmabstand des Sonnenunterrandes” entsprechend dem Monat zeitabhängige Korrektur Zb ablesen
- Die beobachtete topozentrische Höhe in Bezug auf den wahren Horizont ist $H_b = H_{\text{Kimm}} + \text{Gb} + \text{Zb}$
- Evt. Parallaxekorrektur $\text{HP} \cos H_b$ addieren, um die entsprechende geozentrische Höhe zu erhalten.

Greenwich Stundenwinkel GHA und Deklination δ aus dem Nautischen Jahrbuchs des BHS für $dd-mm-yyyy$ $h^h m^m s^s$ UT1

- Von der Seite “Ephemeriden des Tages $dd-mm-yyyy$ ”, Spalte “Sonne”, die Werte für Grt und δ für die volle Stunde h UT1 ablesen.
- Änderung dieser Werte zur nächsten vollen Stunde sind 15° für Grt und Unt für δ (unteres Ende der Spalte).
- Stundenbruchteil $\Delta h = (m + s/60)/60$ errechnen. Dann $\Delta \text{Grt} = 15^\circ \times \Delta h$ (Gradkorrektur ist $\text{int}(\Delta \text{Grt})$). Die Minutenkorrektur folgt aus dem Rest $60(\Delta \text{Grt} - \text{int}(\Delta \text{Grt}))$ und $\Delta \delta = \text{Unt} \times \Delta h$ (in Minuten). ΔGrt kann auch auf Schalttafel unter $m:s$ nachgesehen werden.

H_r und A aus den HO-Tafeln zur Rechenpostion LHA_r , φ_r und der Gestirnsdeklination δ

- Wähle Rechenlänge λ_r , so dass $\text{LHA}_r = \text{GHA} + \lambda_r$ ganzzahlig und λ_r nahe der erwarteten Länge
- Wähle Rechenbreite φ_r ganzzahlig nahe der erwarteten Breite
- Suche HO-Tafeln Seite $\text{Lat} = \varphi_r$, $\text{Dec} = \delta = ddd^\circ mm'$ der Sonne zum Messzeitpunkt, same oder contrary falls δ und φ_r gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben.
- Für LHA_r und $\text{Dec} = ddd^\circ$ suche notiere die Werte für Alt_c , d und Z .
- Rechenhöhe Alt_c wird dann auf den richtigen Deklinationswert interpoliert:
 $H_r = \text{Alt}_c^\circ + d' \times mm/60$ (kann auch aus “Table 5” umständlich abgelesen werden).
- Den Azimut A_r bestimmen wir aus dem Tabellenwert Z nach dem Schema aus Abb. 40: Im “same”-Fall ist $A = 360^\circ - Z$ wenn $\text{LHA}_r \in [0, 180]$ und $A = Z$ wenn $\text{LHA}_r \in [180, 360]$. Im “contrary”-Fall ist $A = 180^\circ - Z$ wenn $\text{LHA}_r \in [0, 180]$ und $A = 180^\circ + Z$ wenn $\text{LHA}_r \in [180, 360]$.

Weiterer Lesestoff, für diejenigen, die auf den Geschmack gekommen sind. Mit Ausnahme des Textes von Umland geht leider keiner auf die speziellen Bedürfnisse von Seglern ein.

Literatur

- [1] Astronomical Almanach, 2007
- [2] Explanatory Supplement to the Astronomical Almanach, 1992
- [3] Montenbruck und Pfleger, Astronomy on the Personal Computer, Springer, 4th Edition, 2000
- [4] Montenbruck, Grundlagen der Ephemeridenrechnung, Elsevier, 7. Auflage, 2005
- [5] Meeus, Astronomical Algorithms, Willmann-Bell Inc., Richmond, Virginia, 1991
- [6] Umland, A short guide to celestial navigation, 1997-2006, <http://www.celnav.de/>
- [7] <http://www.astro.uni-jena.de/Teaching/Praktikum/pra2002/jwprakt.html>

Online-Almanach Rechner:

<http://aa.usno.navy.mil/data/docs/geocentric.html>

<http://www.tecepe.com.br/nav/TheOnlineNauticalAlmanac.htm>

Almanach-programme:

VSOP87 in Fortran von <http://cdsweb.u-strasbg.fr/cgi-bin/qcat?VI/87>

aa in C von <http://www.moshier.net/>

Von Montenbruck in C++ aus Buch

Von JPL in Fortran <http://ssd.jpl.nasa.gov>

Zeitsignale

http://www.novia.net/~sadams/My_Pages/ShortWave/WorldTimes.html

Quellen

Bild der Polbewegung Abb. 11:

International Earth Rotation Service, <http://www.iers.org>

Bild der Tageslängenvariationen, Abb. 13:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, TU München

Sternbilder:

produziert mit Latex-PP3: <http://pp3.sourceforge.net/> im wikipedia design, siehe

<http://de.wikipedia.org/wiki/Sternbild>

Anhänge

A Ebene Trigonometrie

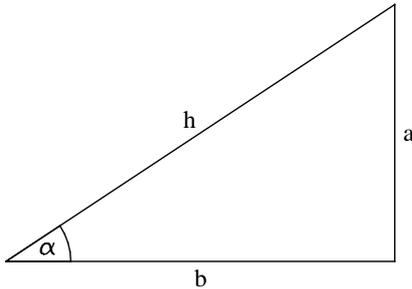
Hier leiten wir die wichtigsten Formeln ab, die für die Astronavigation benutzt werden. Zur besseren Veranschaulichung, gibt es alles zunächst für die Ebene, später für die Kugel.

Eine wichtige Beziehung zwischen den Kantenlängen des rechtwinkligen Dreiecks ist der Satz des Pythagoras

$$\boxed{a^2 + b^2 = h^2} \quad (\text{A.1})$$

Zur weiteren Erinnerung die Definition der trigonometrischen Funktionen, von den wir nur den Kosinus, Sinus und den Tangens brauchen:

Sind a und b die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, die der Hypothenuse h gegenüberliegen, so sind

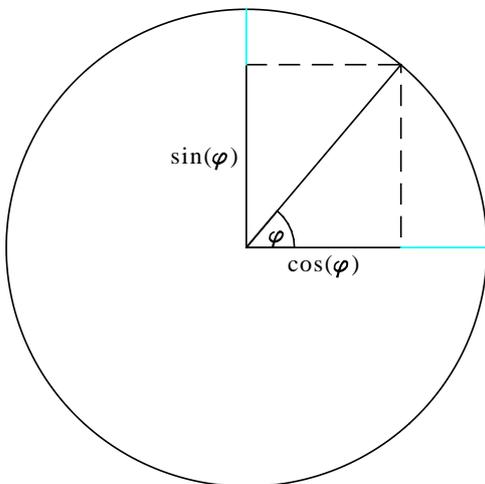


$$\text{Def. Kosinus} \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{b}{h}} \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Def. Sinus} \quad \boxed{\sin(\alpha) = \frac{a}{h}} \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Def. Tangens} \quad \boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a}} \quad (\text{A.4})$$

Damit können wir eine Position auf dem Einheitskreis durch einen einzigen Winkel ausdrücken. Der Positionsvektor hat in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Komponenten



$$\begin{aligned} &\text{Position } \phi \Leftrightarrow \\ &\text{Ortsvektor} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Betrachten wir in der Abb. zu (A.5) das obere rechtwinklige Dreieck, das aus dem Ursprung $(0,0)$, und den Punkten $(\cos \phi, \sin \phi)$ und $(0, \sin \phi)$ gebildet wird. Der Winkel im Ursprung ist jetzt $\frac{1}{2}\pi - \phi$, aber sonst hat das Dreieck die gleichen Seitelängen wie das untere Dreieck mit dem Winkel ϕ , nur An- und Gegenkathete sind jetzt vertauscht. Offensichtlich gilt daher

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin(\phi), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \cos(\phi), \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{1}{\tan(\phi)}} \quad (\text{A.6})$$

Spiegeln wir den Punkt (A.5) an der vertikalen y -Achse $(0,1)$ durch ein Wechsel des Vorzeichens der horizontalen x -Komponente, ist das äquivalent mit einer Ersetzung des Winkels ϕ durch $\pi - \phi$. Damit ist

also

$$\boxed{\cos(\pi - \phi) = -\cos(\phi), \quad \sin(\pi - \phi) = \sin(\phi), \quad \tan(\pi - \phi) = -\tan(\phi)} \quad (\text{A.7})$$

Wollen wir den Vektor in obiger Abbildung um einen Winkel ψ in Richtung auf die horizontale x-Achse $(1, 0)$ drehen, können wir das auf zwei Arten erreichen: wir erniedrigen ϕ im Positionsvektor auf $\phi - \psi$, oder wir drehen die Achsen des Koordinatensystems um ψ im Gegenuhrzeigersinn. Im ersten Fall geht

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \text{ über in } \begin{pmatrix} \cos(\phi - \psi) \\ \sin(\phi - \psi) \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

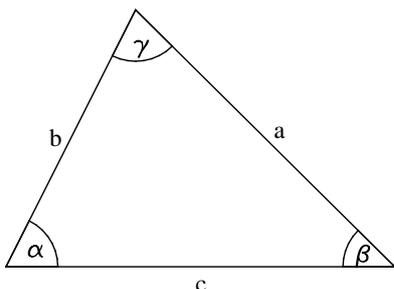
Im letzteren Fall geht die ursprüngliche Darstellung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} &= \cos(\phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ über in} \\ \cos(\phi) \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix} + \sin(\phi) \begin{pmatrix} -\sin(\psi) \\ \cos(\psi) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) \\ \cos(\phi) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\psi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Vergleich von (A.8) und (A.9) ergibt die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

$$\boxed{\cos(\phi - \psi) = \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi, \quad \sin(\phi - \psi) = \cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi} \quad (\text{A.10})$$

Wir brauchen Beziehungen zwischen den Kantenlängen und Winkeln eines allgemeinen Dreiecks. Die beiden wichtigsten sind der Kosinussatz und der Sinussatz



$$\text{Kosinussatz: } \boxed{2bc \cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2} \quad (\text{A.11})$$

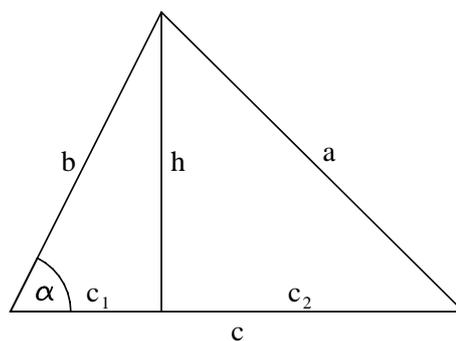
$$\text{Sinussatz: } \boxed{\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}} \quad (\text{A.12})$$

Beweis Kosinussatz:

Wir teilen das Dreieck durch Gerade h in zwei rechtwinklige Dreiecke und dadurch Seite c in c_1 und c_2 . Dann ist nach Pythagoras

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + c_2^2 = b^2 \sin^2(\alpha) + (c - c_1)^2 \\ &= b^2 \sin^2(\alpha) + (c - b \cos(\alpha))^2 \\ &= b^2 \sin^2(\alpha) + c^2 - 2cb \cos(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2cb \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Umordnen gibt den Kosinussatz ■



Beweis Sinussatz:

Wir teilen das Dreieck in drei gleichschenklige Dreiecke, deren gemeinsame Ecke dann im Punkt X liegen muss, dem Zentrum des Umkreises des Dreiecks. Die Schenkel r teilen die Innenwinkel, z.B. bei A den Winkel α in α_1 und α_2 . Der Innenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABX in X ist dann $\pi - 2\alpha_1$ und

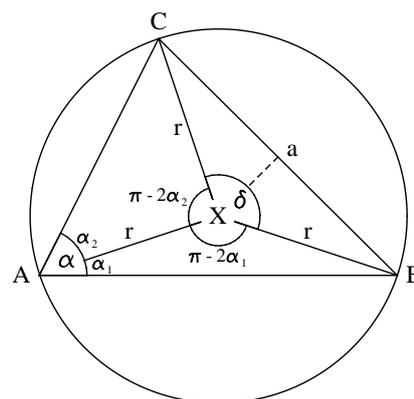
entsprechend $\pi - 2\alpha_2$ für Dreieck ACX. Damit ist Winkel δ

$$\delta = 2\pi - (\pi - 2\alpha_1) - (\pi - 2\alpha_2) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$$

Teilen wir nun Dreieck BCX durch die gestrichelten Gerade in zwei spiegelbildliche, rechtwinklige Dreiecke so muss nach Definition des Sinus gelten

$$\frac{a/2}{r} = \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sin(\alpha) \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{1}{2r}$$

Dieses Verhältniss gibt also immer den gleichen Betrag, auch wenn wir A durch B oder C ersetzen. ■



B Bogen- oder Gradmaß

Es ist in vielen Formel bei Ableitungen vorausgesetzt, dass Winkel in Bogenmaß eingesetzt werden. Das hat den Vorteil, dass die Länge eines Bogensegmentes mit Winkel ϕ und Radius R einfach $R\phi$ beträgt. Zudem entfallen lästige Koeffizienten bei der Differention. Für parktische Rechnungen ist jedoch manchmal auch das Gradmaß von Vorteil.

Ist der Radius R derjenige der Erde R_δ , ist z.B. die Bogenminute eine praktische Einheit für die Winkelangabe von ϕ . Ein Bogensegment auf einem Großkreis mit dem Radius R_δ und einem Zentralwinkel im Erdzentrum von einer Bogenminute hat auf der Erdoberfläche etwa die Länge einer Seemeile. Durch die Abplattung der Erde hat der Abstand zwischen Erdoberfläche und Erdzentrum nicht überall den Wert 6378 km des mittleren Erdradius. Bei den für uns wichtigeren niederen und mittleren Breiten ist der Abstand vom Erdmittelpunkt größer, aber die Krümmung der Erdoberfläche ist stärker und somit ist ein etwas kleinerer Radius relevant. Mit $R_\delta = 6367\text{km}$ ist

$$R_\delta \phi = R_\delta \frac{\pi}{180} \frac{\phi}{1^\circ} = R_\delta \frac{\pi}{10800} \frac{\phi}{1'} = 60 \text{ sm} \frac{\phi}{1^\circ} = 1 \text{ sm} \frac{\phi}{1'}$$

Unsere Konvention: wird ein Winkel mit einer Strecke multipliziert, ist immer das Bogenmaß vorausgesetzt oder der Winkel wird explizit durch eine Gradeinheit dividiert.

Ist der Winkel Argument einer trigonometrischen Funktion, wird nicht explizit angegeben, ob der Winkel in Grad oder Bogenmaß gefordert ist. Es wird implizit immer vorausgesetzt, dass der "richtige" Kosinus oder Sinus mit dem "richtigen" Argument zusammensteht. Streng genommen, sind es aber zwei verschiedene Funktionen, z.B.

$$\sin_{\text{RAD}}(\phi) \quad (\phi \text{ in Bogenmaß}), \quad \sin_{\text{DEG}}(\phi) = \sin_{\text{RAD}}\left(\frac{\pi}{180^\circ} \phi\right) \quad (\phi \text{ in Gradmaß})$$

Wir werden der allgemeinen Konvention folgend beide Funktionen einfach mit sin bezeichnen Dem Taschenrechner müssen wir das aber explizit sagen, welche dieser Funktionen wir meinen, indem wir auf den DEG oder RAD Modus umschalten.

Für die trigonometrischen Umkehrfunktionen gilt analoges:

$$\begin{aligned} \text{asin}_{\text{RAD}}(x) & \quad (\text{ergibt Winkel in Bogenmaß}), \\ \text{asin}_{\text{DEG}}(x) & = \frac{180^\circ}{\pi} \text{asin}_{\text{RAD}}(x) \quad (\text{ergibt Winkel in Gradmaß}) \end{aligned}$$

Das Bogenmaß hat den Vorteil, dass bei kleinen Winkeln der Sinus, Tangens und ihre Umkehrfunktionen

ohne weitere Koeffizienten durch ihre Argumente ersetzt werden können, z.B.

$$\begin{aligned} \sin_{\text{RAD}}(\phi) &\simeq \phi, & \text{asin}_{\text{RAD}}(x) &\simeq x & \text{aber} \\ \sin_{\text{DEG}}(\phi) &\simeq \frac{\pi}{180^\circ}\phi, & \text{asin}_{\text{DEG}}(x) &\simeq \frac{180^\circ}{\pi}x \end{aligned}$$

Die lästigen Vorfaktoren entfallen somit bei der Bogenmaßversion. Auch beim Ableiten müssen wir “Farbe” bekennen und wissen, welche Funktion wir benutzen, denn z.B.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} \sin_{\text{RAD}}(\phi) &= \cos_{\text{RAD}}(\phi) & \text{aber} \\ \frac{d}{d\phi} \sin_{\text{DEG}}(\phi) &= \frac{\pi}{180^\circ} \cos_{\text{DEG}}(\phi) \end{aligned}$$

Im Zweifelsfall benutzen wir Winkel im Bogenmaß, sind Winkel im Gradmaß gefordert, geben wir das explizit an oder Kennzeichnen es durch Division des Winkels durch 1° oder $1'$.

C Elementare Vektorrechnung

Da die Positionsbestimmung in einer drei-dimensionalen Welt auf einer zweidimensionalen Erdoberfläche stattfindet, sind Darstellungen von Örtern und Richtungen durch Vektoren sehr hilfreich. Bevor wir also uns der sphärischen Trigonometrie auf der Kugeloberfläche zuwenden, erinnern wir uns an einige Grundlagen der Vektorrechnung.

Vektoren sind eine Verallgemeinerung von einfachen reellen Zahlen zu Zahlengruppen, für die gewisse Rechenregeln gelten. In unserem Fall sind es jeweils zwei oder drei Zahlen, genannt Komponenten, die jeweils Achsenabschnitte des Vektors auf vorher festgelegte Koordinatenrichtungen definieren.

Wir können Vektoren mit einem Buchstaben, z.B. \mathbf{r} bezeichnen und mehrere Vektoren durch Rechenoperationen symbolisch verknüpfen. Das spart Schreibarbeit und hilft der Übersicht, weil wir nicht mehr alle einzelnen Komponenten explizit hinschreiben. Für konkrete Anwendungen müssen wir jedoch all diese Operationen in ihrer Wirkung auf die Komponenten des Vektors zurückführen.

Entscheidend für die Interpretation der Komponenten ist das zugrundeliegende Koordinatensystem. Der gleiche Vektor hat verschiedene Darstellungen, i.e., Komponenten, wenn er sich auf verschiedene Koordinatensysteme bezieht. Eine entsprechende Umrechnung nennt man Transformation. Derartige Operationen machen einen wichtigen Teil der deskriptiven Astronomie aus, denn je nach Situation werden verschiedene Koordinatensysteme benutzt. Unser geographisches Koordinatensystem ist nur eines davon.

Hier die Grundregeln des Rechnens mit Vektoren mit, z.B. drei Komponenten:
Multiplikation mit einer Zahl:

$$c\mathbf{r} \text{ bedeutet } c \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cr_1 \\ cr_2 \\ cr_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Addition zweier Vektoren:

$$\mathbf{r} + \mathbf{s} \text{ bedeutet } \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + s_1 \\ r_2 + s_2 \\ r_3 + s_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Innere Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt):

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \text{ bedeutet } \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 \quad (\text{C.3})$$

Äußere Multiplikation zweier Vektoren (Kreuzprodukt):

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} \text{ bedeutet } \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 s_3 - r_3 s_2 \\ r_3 s_1 - r_1 s_3 \\ r_1 s_2 - r_2 s_1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Alle diese Operationen sind von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, auch wenn wir ihre Wirkung auf die Komponenten in einem (beliebigen rechtwinkligen) System hingeschrieben haben. Die skalare Multiplikation (C.1) macht nicht anderes als die Länge des Vektors um den Faktor c zu verlängern, die Vektoraddition hängt zwei Vektoren hintereinander. Das Skalarprodukt (C.3) projiziert Vektoren in gewisser Weise aufeinander. Das innere Produkt eines Vektors mit sich selbst gibt gerade die Summe der Komponentenquadrate, also eine Verallgemeinerung des Pythagoras (A.1) auf mehr als zwei Dimensionen. Die Hypotenuse in zwei Dimensionen ist aber gerade die Länge eines zweidimensionalen Vektors mit den Katheten als die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Komponenten. Somit liefert die Wurzel

$$\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = |\mathbf{r}| = r \quad (\text{C.5})$$

gerade die Länge des Vektors \mathbf{r} . Vektoren mit dem Betrag 1 nennen wir Einheitsvektoren.

Das Skalarprodukt (C.3) verschiedener Vektoren gibt das Produkt aus Betrag der Vektorlängen und dem Kosinus des Winkels zwischen ihnen

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = rs \cos(\phi) \quad (\text{C.6})$$

Dies lässt sich leicht überprüfen, wenn wir für \mathbf{r} den Einheitsvektor $(\cos \phi, \sin \phi)$ aus (A.5) und für \mathbf{s} den Einheitsvektor $(1, 0)$ entlang der x-Achse einsetzen. Zwei Vektoren sind demnach senkrecht aufeinander, wenn sie einen Winkel $\phi = \pi/2$ miteinander bilden, also ihr inneres Produkt verschwindet.

Das Kreuzprodukt liefert einen neuen Vektor, der senkrecht auf den zu multiplizierenden Vektoren steht

und dessen Länge der Fläche entspricht, die die beiden Vektoren aufspannen. Sein Betrag ist also gerade das Produkt aus Betrag der Vektorlängen und dem Sinus des Winkels zwischen ihnen

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{s}| = rs \sin(\phi) \quad (\text{C.7})$$

Das lässt sich wieder leicht überprüfen, indem wir für \mathbf{s} den Einheitsvektor $(\cos \phi, \sin \phi, 0)$ in (A.5) einsetzen und für \mathbf{r} Einheitsvektor $(1, 0, 0)$ entlang der x-Achse wählen. Heraus kommt aus der Multiplikation (C.4) dann gerade $(0, 0, \sin \phi)$.

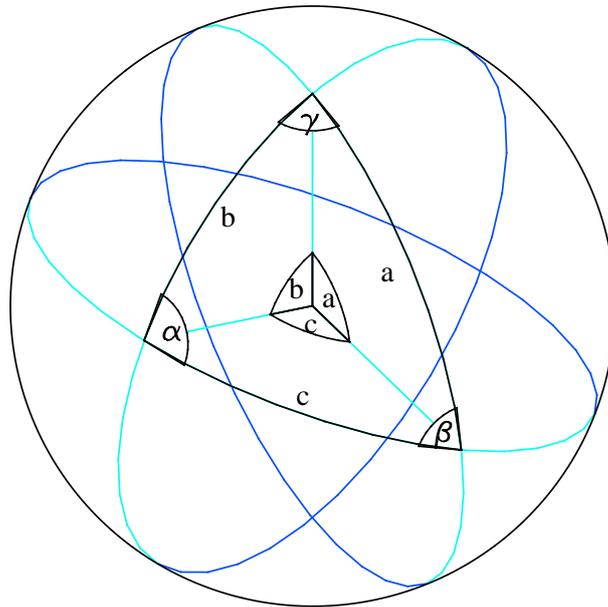
Hätten wir in den obigen Beispielen nicht gerade den Einheitsvektor in x-Richtung genommen, sondern einen beliebig in der x-y Ebene orientierten Einheitsvektor $\mathbf{s} = (\cos \psi, \sin \psi, 0)$, der mit $\mathbf{r} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ einen Winkel $\phi - \psi$ bildet, so wären wieder die einfachsten Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen herausgekommen:

$$\begin{aligned} \cos(\phi - \psi) &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \sin(\phi - \psi) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) = \cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

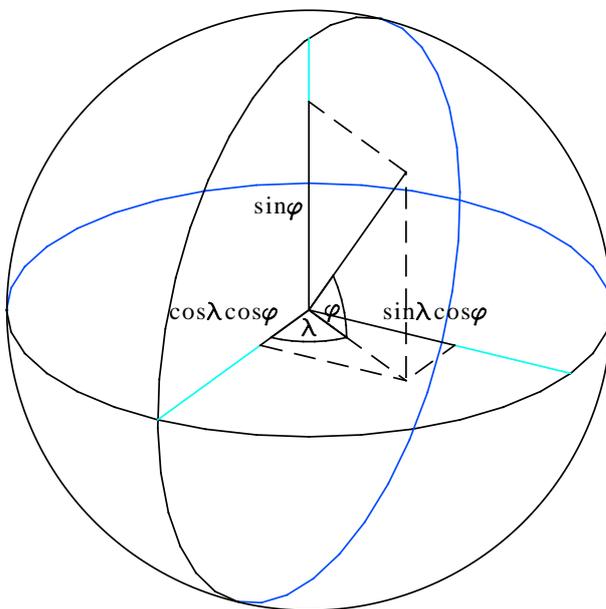
D Sphärische Trigonometrie

Jetzt das gleiche für Dreiecke auf der Einheitskugel. Jede Dreiecksseite eines sphärischen Dreiecks ist Teil eines Großkreises. Die Kantenlängen a, b, c des Dreiecks entsprechen den Winkeln im Kugelzentrum, wenn

diese in Bogenmaß geschrieben werden. Die Innenwinkel des sphärischen Dreiecks α, β, γ sind Winkel, die die Ebenen der Großkreise miteinander bilden.



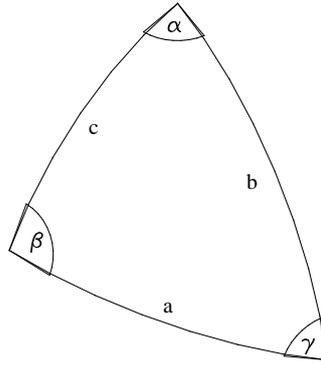
Die Position auf der Oberfläche der Einheitskugel ist durch zwei Winkel definiert. Der Positionsvektor hat in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Komponenten



Position $\lambda, \varphi \Leftrightarrow$

$$\text{Ortsvektor} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \cos(\varphi) \\ \sin(\lambda) \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Wenn wir die vertikale Achse als die Rotationsachse der Erde ansehen, sind λ die geographische Länge und φ die geographische Breite. Die analogen Beziehungen zu Kosinus- und Sinussatz in der Ebene sind:



Seitenkosinussatz: $\cos(a) = \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha) + \cos(b) \cos(c)$ (D.2)

Winkelkosinussatz: $\cos(\alpha) = \sin(\beta) \sin(\gamma) \cos(a) - \cos(\beta) \cos(\gamma)$ (D.3)

Sinussatz: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)}$ (D.4)

Für kleine Seitenwinkel a, b, c nimmt auch das spärliche Dreieck nur einen kleinen Teil der Kugeloberfläche ein. Sind die Seitenlängen sehr viel kleiner als der Kugelradius, sollte die Krümmung der Oberfläche nicht mehr von Bedeutung sein und das Dreieck sich wie ein ebenes Dreieck verhalten. Formal ergibt sich diese Grenze, indem wir \sin und \cos für kleine Argumente a, b, c durch

$$\cos(a) \simeq 1 - \frac{a^2}{2}, \quad \sin(a) \simeq a$$

annähern. Unsere sphärischen Winkelsätze ergeben dann

Seitenkosinussatz: $1 - \frac{a^2}{2} = bc \cos(\alpha) + 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} \rightarrow$ (A.11)

Winkelkosinussatz: $\cos(\alpha) = \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cos(\gamma) = -\cos(\beta + \gamma) \rightarrow \alpha = \pi - \beta - \gamma$

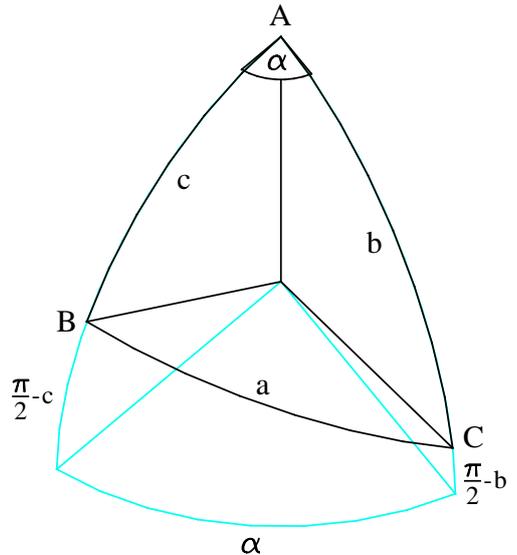
sphärische Sinussatz: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \rightarrow$ (A.12)

Beweis Seitenkosinussatz:

Wir wählen die Richtung von \mathbf{A} als die Erdachse und den Meridian $\lambda=0$ wählen wir so, dass er durch \mathbf{B} geht. Dann sind \mathbf{B} und \mathbf{C} durch die Positionsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= (\cos(\frac{\pi}{2} - c), 0, \sin(\frac{\pi}{2} - c)) \\ &= (\sin(c), 0, \cos(c)) \\ \mathbf{C} &= (\cos(\alpha) \cos(\frac{\pi}{2} - b), \sin(\alpha) \cos(\frac{\pi}{2} - b), \sin(\frac{\pi}{2} - b)) \\ &= (\cos(\alpha) \sin(b), \sin(\alpha) \sin(b), \cos(b)) \end{aligned}$$

darstellbar. Den Kosinus des Winkels a zwischen \mathbf{B} und \mathbf{C} erhalten wir dann durch komponentenweise Multiplikation von \mathbf{B} und \mathbf{C} . ■



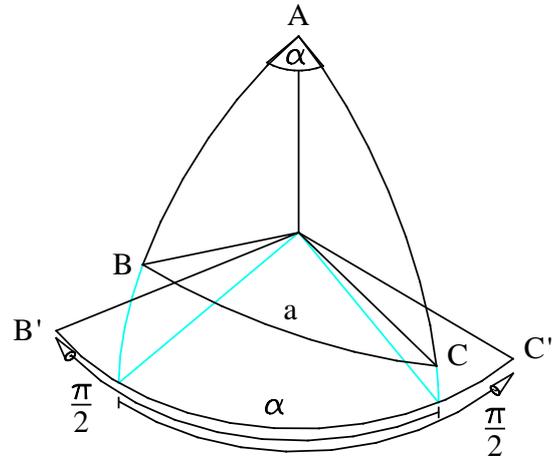
Beweis Winkelkosinussatz:

Zu jedem sphärischen Dreieck ABC gibt es ein komplementäres Dreieck dessen Ecken in den Richtungen $A' \sim B \times C$, $B' \sim C \times A$ und $C' \sim A \times B$ auf der Einheitskugel liegen. Umgekehrt ist wegen

$$B' \times C' = (C \times A) \times (A \times B) = [(C \times A) \cdot B] \sim A$$

wieder parallel zu A (wenn ABC ein rechthändiges Dreieck ist). Die Komplementarität ist also reziprok. Zur Konstruktion z.B. von B' und C' drehen wir B bzw. C in die Ebene senkrecht zu A und in dieser Ebene um $\pi/2$ gegeneinander. Der Kreisbogen zwischen B' und C' hat dann die Länge

$$\alpha' = \pi - \alpha$$



Analog für die anderen Seiten und für die Rückkonstruktion vom komplementären zum ursprünglichen Dreieck. Den Winkelkosinussatz erhalten wir, indem wir in den Seitenkosinussatz des komplementären Dreiecks die Seiten- und Innenwinkel des komplementären durch die Innen- und Seitenwinkel des originalen Dreiecks nach obiger Beziehung ersetzen. Beachte (A.7), dass $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ aber $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ ist. ■

Beweis sphärischer Sinussatz:

Wir drehen B entlang dem Großkreis von c nach B' , so dass B' senkrecht auf A steht. Genauso erhalten wir C' durch Drehung von C . Nach Def. von \sin und \cos ist dann $B = A \cos(c) + B' \sin(c)$ und analog $C = A \cos(b) + C' \sin(b)$. Mit $A \sin(\alpha) = B' \times C'$ ergibt

$$\begin{aligned} A \sin(\alpha) \sin(c) \sin(b) &= \\ B' \sin(c) \times C' \sin(b) &= \\ (B - A \cos(c)) \times (C - A \cos(b)) &= \\ B \times C - A \times C \cos(c) - B \times A \cos(b) \end{aligned}$$

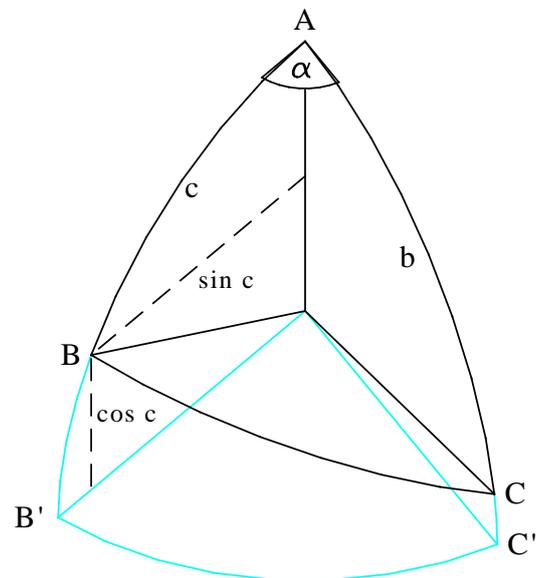
Skalare Multiplikation mit A gibt

$$\sin(\alpha) \sin(c) \sin(b) = A \cdot B \times C$$

und damit

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{A \cdot B \times C}{\sin(a) \sin(c) \sin(b)}$$

wobei die rechte Seite offensichtlich unabhängig von der Wahl von A als Ausgangspunkt für unsere Konstruktion ist. ■



Kosinus- und Sinussatz lassen sich ebenfalls elegant durch Koordinatentransformation beweisen. Dazu fassen wir in einem sphärischen Dreieck zwei der Ecken, z.B. A und B als z-Achse eines jeweils eigenen Koordinatensystems wie in (D.1) auf. Der Großkreis, auf dem A und B liegen, definieren wir in beiden

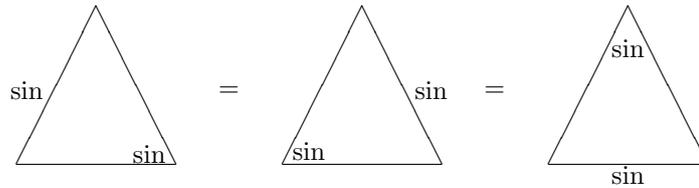
$\sin(\alpha)$ multipliziert

$$\frac{1}{\tan(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\tan(b) \sin(\alpha)} - \frac{\cos(c)}{\tan(\alpha)} \quad \text{oder}$$

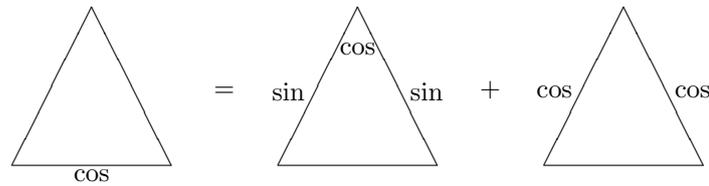
$$\boxed{\tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{\frac{\sin(c)}{\tan(b)} - \cos(c) \cos(\alpha)}} \quad (\text{D.10})$$

Abschließend sind die sphärischen Winkelsätze noch einmal symbolisch zusammengestellt, unabhängig von der Bezeichnung der Winkel.

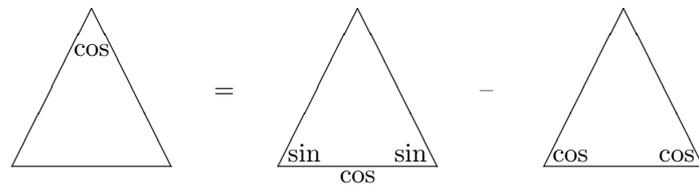
Der Sinussatz verknüpft jeweils Paare aus gegenüberliegendem Innen- und Seitenwinkel:



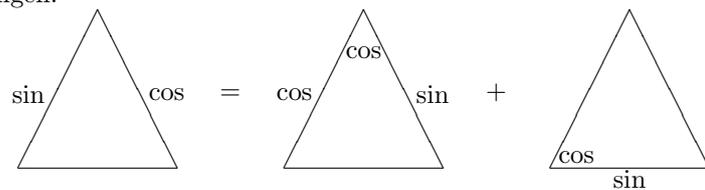
Der Seitenkosinus-Satz verknüpft drei Seiten- mit einem Innenwinkel:



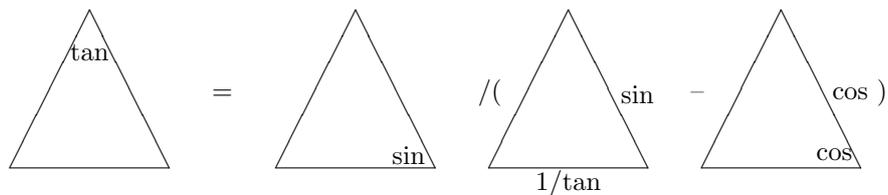
Der Winkelkosinus-Satz verknüpft drei Innenwinkel- mit einer Seite:



Der Sinus-Kosinus-Satz verknüpft drei Seiten- mit zwei Innenwinkel. Er dient daher eher zur Ableitung anderer Winkelbeziehungen:



Der Tangens-Satz verknüpft wie der Sinus-Sätze zwei Seiten- mit zwei Innenwinkel. Die Innen- und Seitenwinkel müssen aber nicht gegenüber liegen:



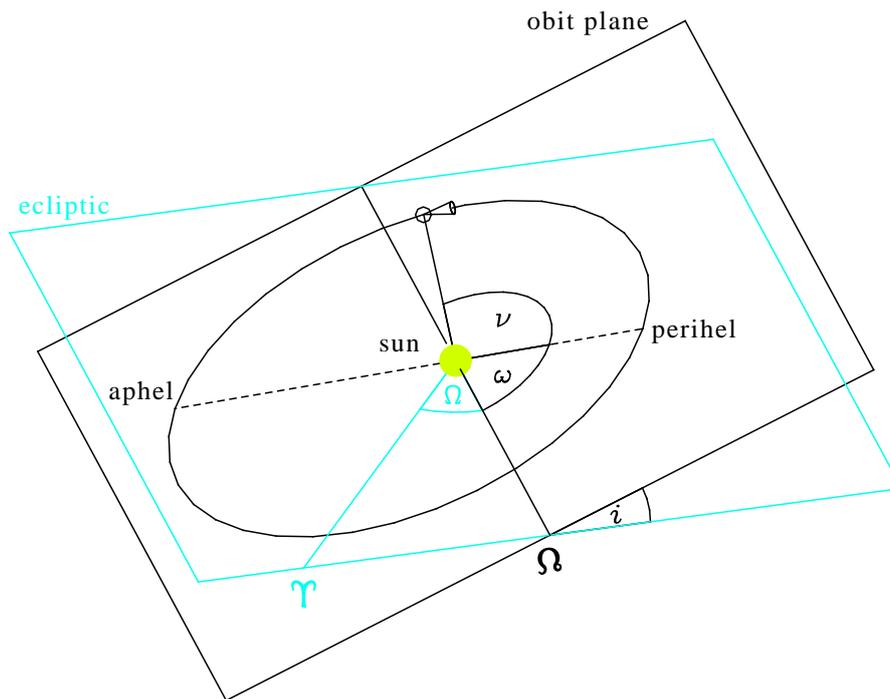


Abbildung 41: Bahnwinkel eines Planeten in der Bahnebene und der Ebene der Ekliptik. In der Bahnebene liegen die wahre Anomalie ν (der Winkel zwischen Planet und Perihel) und das Argument ω des aufsteigenden Knotens (der Winkel zwischen Perihel und Ω). In der Ebene der Ekliptik liegt die Länge Ω des aufsteigenden Knotens (der Winkel zwischen Ω und Frühlingspunkt Υ).

E Das Nautische Jahrbuch im Taschenrechner

Der *Astronomical Almanach* veröffentlicht jedes Jahr neben ausführlichen Tabellen auch Formeln zur angenäherten Berechnung von Sonnen-, Mond- und Planetenpositionen [1]. Die Hintergründe zu den Ephemeridenrechnungen sind sehr gut in [2, 3, 4] beschrieben. Wir bieten hier eine vereinfachte Version der Planetenbahnberechnung, die gerade ausreicht, um den Fehler kleiner als $1'$ zu halten. Diese Abweichung zur wahren Planetenposition ist für die Navigation ausreichend und hält andererseits den rechnerischen Aufwand in Grenzen, die mit dem Taschenrechner gerade noch zu bewältigen sind.

Die Planeten umkreisen die Sonne angenähert auf elliptischen Bahnen, die durch wenige Bahnparameter gekennzeichnet werden können. Die wahre Bahn der Planeten weicht etwas von diesen Keplerschen "Idealellipsen" ab, da die Planeten sich gegenseitig anziehen und sich entsprechend der Umlaufzeiten um die Sonne periodisch stören. Diese Störungen sind jedoch klein, denn 99.87% der Masse unseres Sonnensystems ist in der Sonne vereinigt. Jupiter und Saturn als nächstschwere Himmelskörper haben etwa $2/3$ bzw. $1/5$ der verbleibenden 0.13% der Gesamtmasse.

Die Bahnparameter für die mit bloßem Auge sichtbaren Planeten sind in Tabelle 3 aufgelistet. Die erste Zeile gibt für jeden Planeten den Wert der Parameter zum Zeitpunkt J2000 (also 1. Januar 2000, 12^h) an, die nächste Zeile die zeitliche Änderung der Parameters pro Julianischem Tag, immer bezogen auf die "mean ecliptic and equinox of date".

Die ersten drei Parameter in Tabelle 3 beschreiben die Bahnellipse selbst: Die große Halbachse der Bahn a , die Bahnexzentrizität e und die mittlere Anomalie M . Die Exzentrizität gibt die Form der Ellipse wieder, ihre kleine Halbachse ist um den Faktor $\sqrt{1-e^2}$ kleiner als die große Halbachse a . Für eine exakte Kreisbahn ist $e = 0$ und a gerade der Bahnradius. Eine Bahnellipse hat immer einen Ort des

kleinsten und einen des größten Abstandes von der Sonne, das Perihel und das Aphel. Die Abstände von der Sonne betragen dort gerade $a(1 \pm e)$. Der Dritte der Parameter, die Anomalie, misst von der Sonne aus gesehen den Winkel zwischen der momentanen Position des Planeten und der Perihelrichtung. Mit diesem Bahnwinkel verändert sich auf der elliptischen Bahn auch der Abstand des Planeten zur Sonne und damit auch die Bahngeschwindigkeit. Der Bahnwinkel, die wahre Anomalie ν , wächst daher nicht gleichförmig an, wie es auf einer Kreisbahn der Fall wäre. In der Tabelle ist daher die mittlere Anomalie M aufgeführt, die, wir kennen das Prinzip von der mittleren Sonne, gleichförmig und linear mit der Zeit anwächst, und genau zwar so schnell, dass sie für einen Umlauf exakt die gleiche Umlaufperiode wie die wahre Anomalie benötigt. Den Unterschied zwischen der wahren und der mittleren Anomalie (Equation of Center) werden wir unten berechnen müssen.

Die anderen drei Parameter legen die Lage der Bahnebene gegen die Ebene der Ekliptik fest (siehe Abb. 41). Die Planetenbahn schneidet die Ekliptikebene entlang einer Linie, die Knotenlinie genannt wird. Die Knotenrichtung, in der der Planet die Ekliptik von Süden nach Norden passiert ist die Richtung \mathcal{Q} des aufsteigenden Knotens. Das Argument ω des Perihels gibt in der Bahnebene des Planeten den Winkel zwischen dem aufsteigenden Knoten und der Perihelrichtung an. In der Ebene der Ekliptik hat der aufsteigende Knoten den Winkel Ω , die ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens, gegen den Frühlingspunkt Υ . Damit ist die Bahnebene eindeutig festgelegt, bis auf den Inklinationwinkel i , den die beiden Ebenen in der Knotenlinie mit einander bilden.

Diese Angaben in Tabelle 3 genügen uns, um die Planetenpositionen mit der für uns ausreichenden Genauigkeit zu berechnen. Für den Mond sind keine Angaben gemacht, denn seine Bahn lässt sich wegen der starken Störungen seiner Bahn nicht mehr sinnvoll mit dem Taschenrechner ausrechnen.

Da die aktuelle Bahnebene der Erde gerade die Ekliptik selbst ist, ist für sie natürlich die Inklination $i = 0$ und bleibt es auch. Eine Länge des aufsteigenden Knoten gibt es dann für die Erde nicht, und die Perihellänge ω wird direkt zum Frühlingspunkt gemessen, so dass wir für die Erde immer $\Omega = 0$ setzen können.

Eigentlich sollten alle Parameter bis auf die mittlere Anomalie unverändert bleiben. Wir sehen aber in der jeweiligen zweiten Tabellenreihe, dass sich auch die anderen Parameter mit der Zeit langsam verändern, auch die Auswirkungen der Anziehung der Planeten untereinander. Am schnellsten variiert natürlich M , das in einem Planetenjahr ja um 360° zunehmen muß. Das jeweilige Planetenjahr beträgt somit $360^\circ / (dM/dt)$ Julianische Tage.

Für die Berechnung der Planetenposition benötigen wir die Zeitangabe und zwar wie in (4.2), in der Form Julianischer Tage seit dem 1. Jan 2000, $12^h 0$, dem Tag J2000

$$D = 2555.5 + d + \frac{1}{24}(h + \frac{1}{60}(m + \frac{s}{24})) \quad (\text{E.1})$$

Hier sind d die Julianischer Tage seit dem 31. Dezember 2006 sind (angefangen mit $d=1$ für den 1. Januar 2007) und h , m und s sind die Stunden, Minuten und Sekunden der Tageszeit nach UT1.

Mit dieser Zeitangabe bringen wir in einem ersten Schritt die mittlere Anomalie und die Exzentrizität des jeweiligen Planeten auf den aktuellen Stand

$$M = M_{2000} + \frac{dM}{dt} D \quad e = e_{2000} + \frac{de}{dt} D \quad (\text{E.2})$$

Die Änderung der Exzentrizität ist dabei so klein, dass für unsere Genauigkeit der Wert e_{2000} für die kommenden 100 Jahre ausreicht. Die zweite der obigen Gleichungen ist eigentlich überflüssig ist. Um seine wahre Anomalie ν zu erhalten, berechnen wir zunächst iterativ in sechs Schritten eine Hilfsgröße, die exzentrische Anomalie E

$$\begin{aligned} Q = 1 + e \cos(M) & & dE = Q \frac{180^\circ}{\pi} e \sin(M) & & E = M + dE \\ Q = Q - 2 & & dE = \frac{1}{Q} (dE - \frac{180^\circ}{\pi} \sin(E)) & & E = E + dE \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn
$180^\circ/\pi e(2 - e/4)$	0°:7755	1°:9107	10°:5785	5°:5238	6°:3209
$180^\circ/\pi 4e^2/5$	0°:0021	0°:0128	0°:3999	0°:1078	0°:1414
$180^\circ/\pi 13e^3/12$	0°:0000	0°:0003	0°:0506	0°:0071	0°:0106

Die Koeffizienten sind hier gleich in Grad umgerechnet. Die zeitliche Änderung der Exzentrizität e ist so klein, dass sie den nächsten 100 Jahren nicht ins Gewicht fällt.

Die Planetenposition brauchen wir jetzt nur noch in das richtige Koordinatensystem zu drehen. Dazu wechseln wir zu kartesischen Vektorkomponenten. Das Schema ist immer das gleiche: wir drehen erst um eine Achse senkrecht zur Bezugsebene, bis eine der Achsenrichtungen in der Ebene mit der Schnittgeraden zur nächsten Bezugsebene übereinstimmt. Dann drehen wir das Koordinatensystem um diese Schnittgerade, bis eine der anderen beiden Achsen in die neuen Bezugsebene fällt. Bei jeder Drehung bleibt die Koordinate entlang der Drehachse unverändert, die andere transformieren sich wie (A.9). Die Bezugsebenen sind sukzessive: die Bahnebene des Planeten \rightarrow Ebene der Ekliptik \rightarrow Äquatorebene der Erde. Die Schnittgeraden dazwischen haben die Richtungen des aufsteigenden Knotens \mathfrak{Q} und des Frühlingspunktes \mathfrak{Y} . Mit der oben errechneten wahren Anomalie ν und dem Sonnenabstand r erhalten wir

$$\text{Drehung um } \omega = \omega_{2000} + \frac{d\omega}{dt} D \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\nu + \omega) && \text{in Bahnebene und Ekliptik, parallel zu } \mathfrak{Q} \\ y &= r \sin(\nu + \omega) && \text{in Bahnebene, senkrecht zu } \mathfrak{Q} \end{aligned}$$

$$\text{Drehung um } i = i_{2000} + \frac{di}{dt} D \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned} y &= y \cos(i) && \text{in Ekliptik, senkrecht zum } \mathfrak{Q} \\ z &= y \sin(i) && \text{senkrecht zur Ekliptik} \end{aligned}$$

$$\text{Drehung um } \Omega = \Omega_{2000} + \frac{d\Omega}{dt} D \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned} x &= x \cos(\Omega) - y \sin(\Omega) && \text{in Ekliptik, parallel zu } \mathfrak{Y} \\ y &= x \sin(\Omega) + y \cos(\Omega) && \text{in Ekliptik, senkrecht zu } \mathfrak{Y} \end{aligned}$$

$$\text{Abstandsvektor vom Erdzentrum} \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} x &= x - x_{\mathfrak{s}} && \text{in Ekliptik und Äquatorebene, parallel zu } \mathfrak{Y} \\ y &= y - y_{\mathfrak{s}} && \text{in Ekliptik, senkrecht zu } \mathfrak{Y} \end{aligned}$$

$$\text{Drehung um } \epsilon = \epsilon_{2000} + \frac{d\epsilon}{dt} D \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned} y &= y \cos(\epsilon) - z \sin(\epsilon) && \text{in Äquatorebene, senkrecht zu } \mathfrak{Y} \\ z &= y \sin(\epsilon) + z \cos(\epsilon) && \text{senkrecht zur Äquatorebene} \end{aligned}$$

$$\text{Winkel im Äquatorialsystem} \quad (\text{E.11})$$

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{Rektazension, Quadrant nach Vorzeichen von } x \text{ und } y$$

$$\delta = \text{asin}\left(\frac{z}{r}\right) \quad \text{Deklination}$$

Für Planeten müssen wir also zweimal rechnen: erst die ekliptikale Position der Erde, dann die ekliptikale Position des Planeten, die wir aus (E.8) berechnen. In (E.9) werden die Vektoren dann von einander abgezogen. Die ekliptikale Position der Erde erhalten wir schon aus Schritt (E.6), denn die Drehungen (E.8) und (E.7) um Ω und i entfallen für die Erde, da die entsprechenden Drehwinkel ja für die Erdbahn verschwinden. Die Erde liegt immer in der Ekliptik, daher ist immer $z_{\mathfrak{s}} = 0$.

Interessiert uns die Position der Sonne von der Erde aus gesehen, berechnen wir nur die ekliptikale Position der Erde nach (E.6). Die Position der Sonne ist $(x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot})=0$, denn sie steht im Zentrum unseres heliozentrischen Systems. In (E.9) drehen wir dann effektiv den Positionsvektor der Erde um und im nächsten Schritt (E.10) entfällt dann die z -Komponente, denn der Abstand der Sonne von der

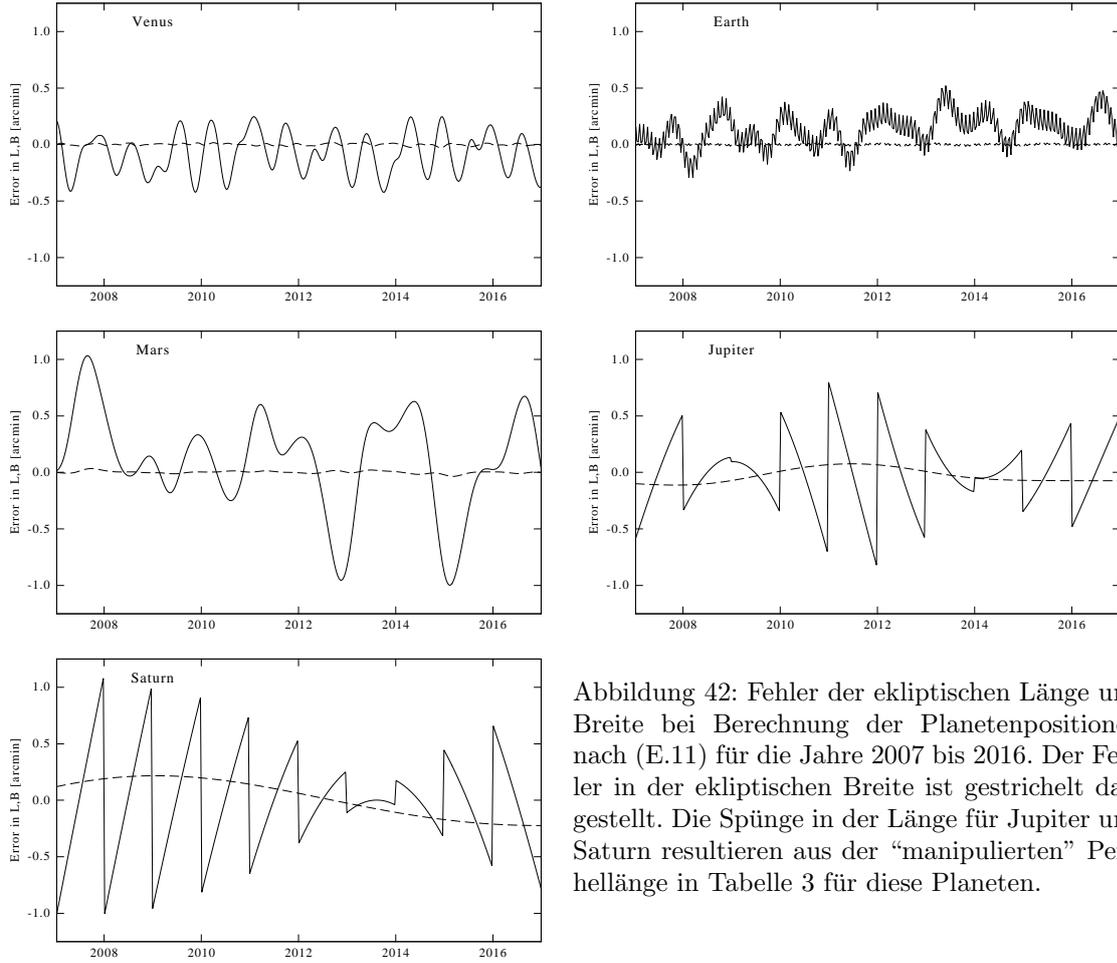


Abbildung 42: Fehler der ekliptischen Länge und Breite bei Berechnung der Planetenpositionen nach (E.11) für die Jahre 2007 bis 2016. Der Fehler in der ekliptischen Breite ist gestrichelt dargestellt. Die Spünge in der Länge für Jupiter und Saturn resultieren aus der “manipulierten” Perihellänge in Tabelle 3 für diese Planeten.

Ekliptikebene ist null. Insgesamt ergibt sich damit für die äquatorialen Koordinaten der Sonne statt (E.11)

$$\alpha_{\odot} = \text{atan}(\tan(\nu + \omega) \cos(\epsilon)) + \pi, \quad \delta_{\odot} = -\text{asin}(\sin(\nu + \omega) \sin(\epsilon)) \quad (\text{E.12})$$

wobei für ν , ω und ϵ natürlich die Bahnelemente der Erdbahn eingesetzt werden müssen.

Die große $\nu + \omega$ ist die wahre ekliptikale Länge der Erde, $L = M + \omega$ ist die entsprechende mittlere ekliptikale Länge. Für sie ergibt sich mit den Werten der Tabelle 3

$$\omega + M = L = 100^{\circ}.4658 + 0^{\circ}.9856471194 D \quad (\text{E.13})$$

Die Differenz der wahren und der mittleren ekliptikalen Länge ist für die Erde die Gleiche, wie die Differenz der entsprechenden Anomalien, der “equation of center”. Benutzen wir diese Differenz in der Form (E.5) zur Berechnung der wahren ekliptikalen Länge, ergibt sich

$$\nu + \omega = L + \nu - M = L + 1^{\circ}.9107 \sin(M) + 0^{\circ}.0128 \sin(2M) + 0^{\circ}.0003 \sin(3M) \quad (\text{E.14})$$

wobei wir die Koeffizienten für die Erde gleich eingesetzt haben. Diese wahre ekliptikale Länge in (E.12) eingesetzt ergibt dann die equatorialen Koordinaten der Sonne. Auch hier können wir wieder die Differenz zur mittleren Sonne bilden, das ergibt dann die “equation of time” (Zeitgleichung)

$$\Delta\alpha_{\text{EqT}} = \alpha_{\odot} - (L - \pi) = \text{atan}(\tan(\nu + \omega) \cos(\epsilon)) - L \quad (\text{E.15})$$

Die so berechneten Planetenpositionen berücksichtigen nicht ihre gegenseitige Störung. In Abb. 42 ist daher der Fehler in der ekliptikalen Länge und Breite der mit den Bahnparametern der Tabelle 3 für die nächsten 10 Jahre berechneten Satellitenpositionen dargestellt. Die ekliptikalen Winkelkoordinaten ergeben sich aus den Kartesischen des Schrittes (E.8).

Die ekliptikale Breite, die wir mit unserem Schema berechnen, ist immer genauer als eine Bogenminute. Für die inneren Planeten und die Erde (bzw. die Sonne) ist auch die Länge hinreichend genau. Die "hochfrequenten" Schwankungen der Erdposition rühren von der Bewegung der Erde um den Erd-Mond Schwerpunkt her, der in unseren Berechnungen nicht enthalten ist und sich daher in dem Fehler widerspiegelt.

Beim Mars erreicht der Fehler der Länge kurzzeitig $1'$, bei Jupiter und Saturn beträgt der Fehler der Länge mehrere $1'$, wenn wir die offiziellen Bahnparameter benutzen. Jupiter und Saturn sind die schwersten Planeten des Sonnensystems und bei 5 bzw. 10 AU ist die Anziehungskraft der Sonne so geschwächt, dass die gegenseitige Beiflussung der beiden Planeten deutliches Gewicht hat und entsprechende Spuren in ihren Bahnen hinterläßt. Um den Längenfehler unter einer Bogenminute zu halten, haben wir in Tabelle 3 die Länge des aufsteigenden Knotens Ω jahresweise künstlich verschoben. Je nach Jahr der Berechnungszeit sind für Jupiter und Saturn die entsprechend aufgeführten Werte für Ω_{2000} zu benutzen, um einen Fehler unterhalb einer Bogenminute wie in Abb. 42 zu reproduzieren. Die Sprünge in Abb. 42 spiegeln diese abrupten Änderungen von Ω wieder.

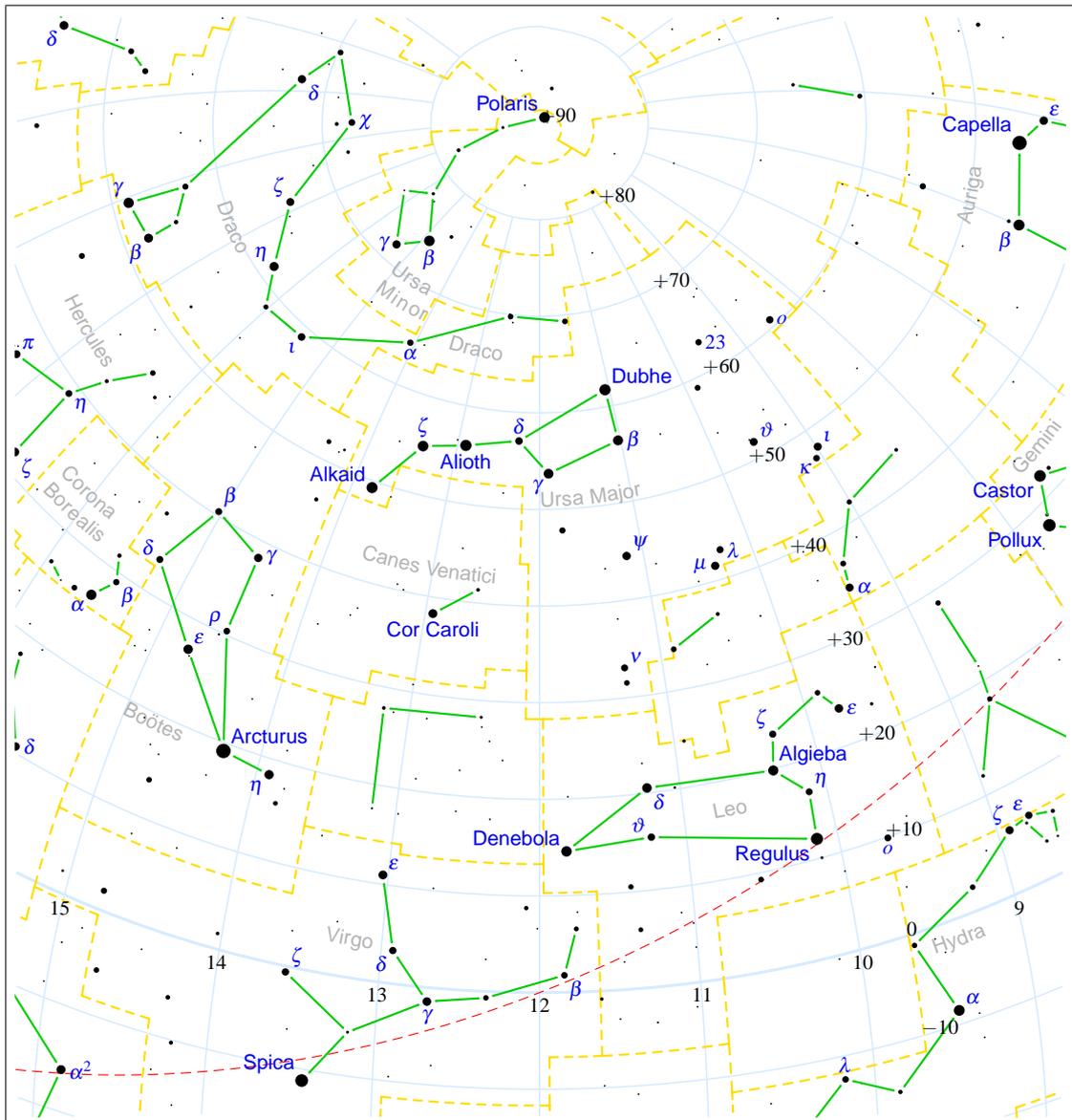
F Sternkoordinaten

Hier eine Auswahl der hellsten Sterne, ihre Position und Helligkeit

Sternbild	Name	Magn	α (J2000.0)	δ (J2000.0)	Entf(Lj)
α Canis Majoris	Sirius	-1.46	06 ^h 45 ^m 08 ^s .9	-16°42'58''	8.6
α Carinae	Canopus	-0.72	06 ^h 23 ^m 57 ^s .2	-52°41'44''	74
α Centauri	Toliman, Rigil	-0.01	14 ^h 39 ^m 36 ^s .2	-60°50'07''	4.3
α Boötis	Arcturus	-0.04	14 ^h 15 ^m 39 ^s .6	+19°10'57''	34
α Lyrae	Wega	0.03	18 ^h 36 ^m 56 ^s .2	+38°47'01''	25.3
α Aurigae	Capella	0.08	05 ^h 16 ^m 41 ^s .3	+45°59'53''	41
β Orionis	Rigel	0.12	05 ^h 14 ^m 32 ^s .2	-08°12'06''	815
α Canis Minoris	Procyon	0.38	07 ^h 39 ^m 18 ^s .1	+05°13'30''	11.4
α Eridani	Archenar	0.46	01 ^h 37 ^m 42 ^s .9	-57°14'12''	69
α Orionis	Beteigeuze	0.50	05 ^h 55 ^m 10 ^s .3	+07°24'25''	650
β Centauri	Hadar	0.61	14 ^h 03 ^m 49 ^s .4	-60°22'22''	320
α Aquilae	Altair	0.77	19 ^h 50 ^m 46 ^s .9	+08°52'36''	16.8
α Tauri	Aldebaran	0.85	04 ^h 35 ^m 55 ^s .2	+16°30'33''	60
α Virgo	Spica	0.98	13 ^h 25 ^m 11 ^s .5	-11°09'41''	220
α Scorpii	Antares	0.96	16 ^h 29 ^m 24 ^s .4	-26°25'25''	425
β Geminorum	Pollux	1.14	07 ^h 45 ^m 18 ^s .9	+28°01'34''	40
α Piscis Austrini	Fomalhaut	1.16	22 ^h 57 ^m 39 ^s .0	-29°37'20''	22
α Cygni	Deneb	1.25	20 ^h 41 ^m 25 ^s .8	+45°16'49''	1630
β Crucis	Mimosa	1.25	12 ^h 47 ^m 43 ^s .3	-59°41'19''	460
α Leonis	Regulus	1.35	10 ^h 08 ^m 22 ^s .3	+11°58'02''	69
α Geminorum	Castor	1.58	07 ^h 34 ^m 36 ^s .0	+31°53'19''	52
α Grus	Al Nair	1.73	22 ^h 08 ^m 13 ^s .9	-46°57'38''	173
ϵ Ursa Majoris	Alioth	1.76	12 ^h 54 ^m 01 ^s .6	+55°57'35''	81
α Ursa Majoris	Dubhe	1.81	11 ^h 03 ^m 43 ^s .8	+61°45'04''	124
α Persii	Mirfak	1.79	03 ^h 24 ^m 19 ^s .4	+49°51'41''	592

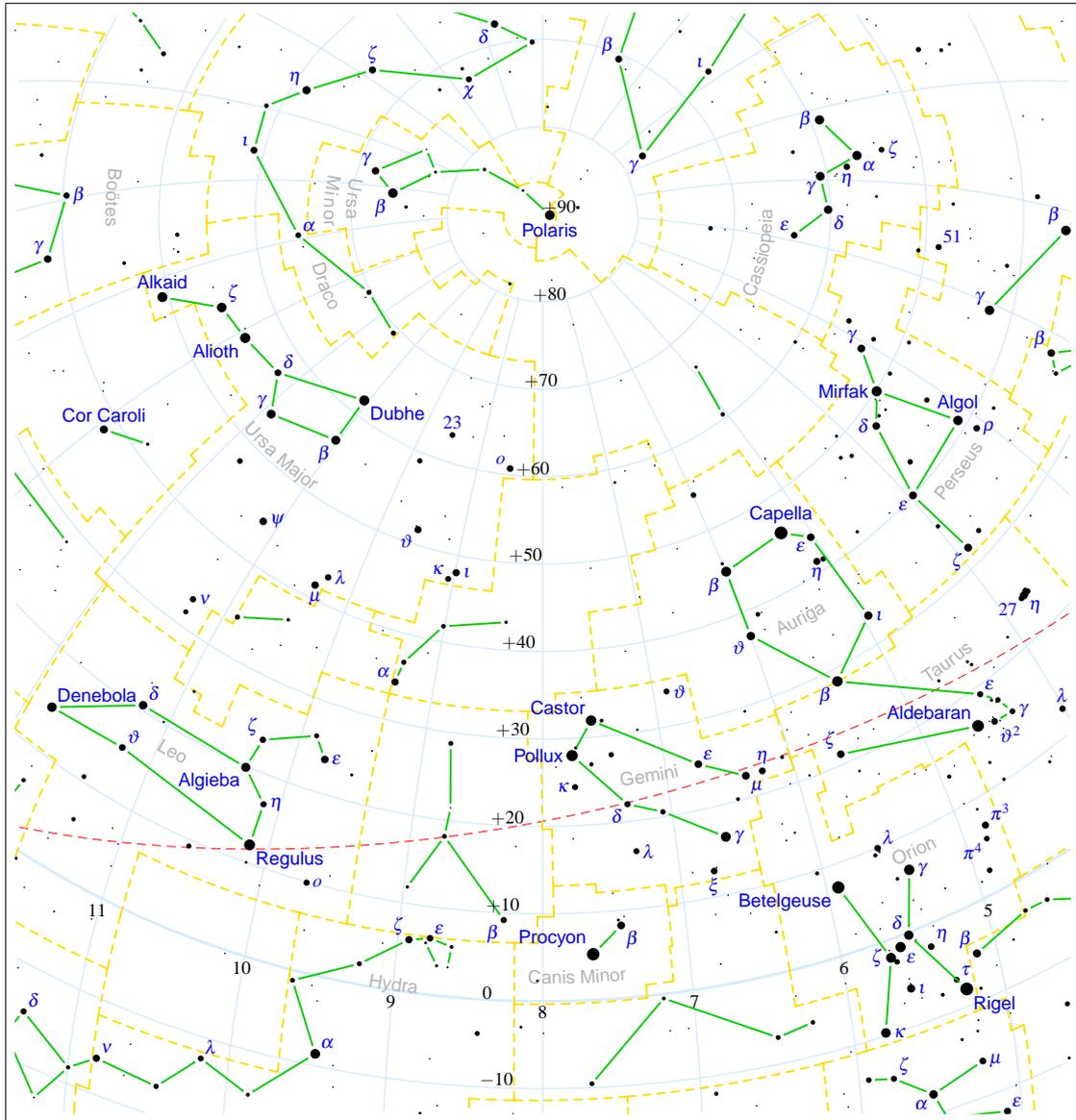
η Ursa Majoris	Alkaid, Benetnasch	1.85	$13^{\text{h}}47^{\text{m}}32^{\text{s}}.6$	$+49^{\circ}18'48''$	101
γ Leonis	Algieba	2.01	$10^{\text{h}}19^{\text{m}}58^{\text{s}}.2$	$+19^{\circ}50'31''$	126
α Andromedaris	Sirrah	2.07	$00^{\text{h}}08^{\text{m}}23^{\text{s}}.2$	$+29^{\circ}05'27''$	97
β Persii	Algol	2.09	$03^{\text{h}}08^{\text{m}}10^{\text{s}}.1$	$+40^{\circ}57'20''$	93
β Leonis	Denebola	2.14	$11^{\text{h}}49^{\text{m}}03^{\text{s}}.9$	$+14^{\circ}34'20''$	36
α Canum Venaticorum	Cor Caroli	2.89	$12^{\text{h}}56^{\text{m}}01^{\text{s}}.7$	$+38^{\circ}19'06''$	110

Damit man die Sterne auch wiederfindet, eine kleine Exkursion durch den Nachthimmel:



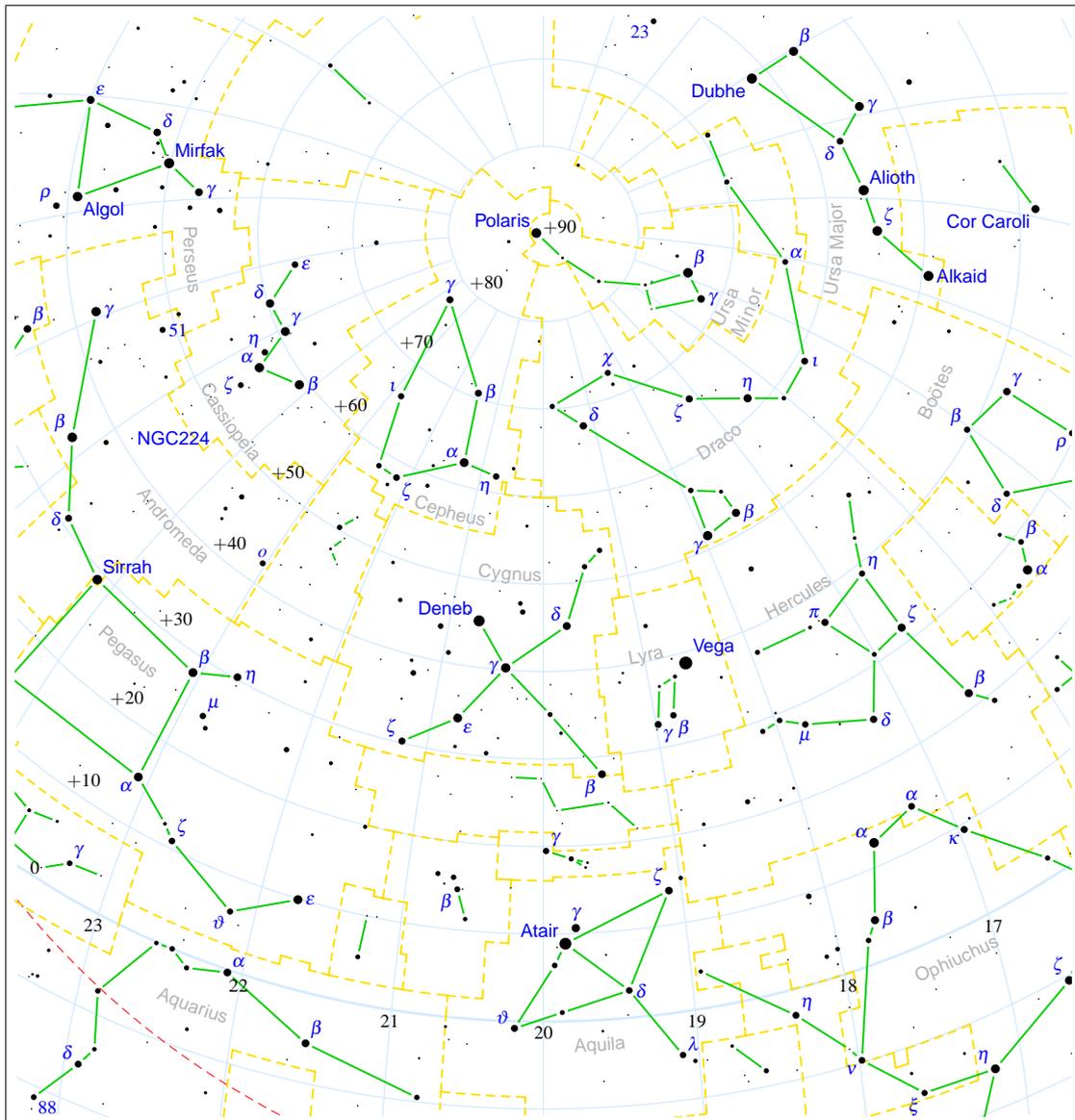
Nordhemisphäre mit Sternbildern (von Nord nach Süd) Kleiner Wagen, (Ursa Minor, eigentlich die kleine Bäarin) mit dem Polarstern, Großer Wagen (Ursa Major), Löwe (Leo) gefolgt vom Bärenhüter (Boötes) und Virgo (Jungfrau) am Äquator. Die rote gestrichelte Linie ist die Ebene der Ekliptik, sie geht ziemlich genau durch Regulus, dem hellsten Stern des Sternbildes Löwe. Andere helle Sterne in dieser Gegend sind Arcturus, ein "roter Riese" im Sternbild Boötes und der Hellste auf der Nordhalbkugel und Spica in der Jungfrau (Virgo). Bei kleinerer Rektazension (also früher) sehen wir Capella im Sternbild Auriga, und Castor und Pollux in den Zwillingen. Den Großen Wagen erkennt man sehr schnell, sein vorderer Rand gebildet von Dubhe und β -Ursa Majoris liegt auf dem $\alpha = 11^{\text{h}}$ Meridian. Folgt man

ihm nach Norden, findet man den Polarstern. Nach Süden kommen die nächsten helleren Sterne erst im Sternbild Löwe nahe der Ekliptik. Folgen wir der “Deichsel” des Großen Wagens (bzw dem “Schwanz” der Bärin) über Alloth → ζ-Ursa Majoris → Alkaid zu größerer Rektazension (also nach links), kommen wir in das Sternbild Boötes mit Arcturus an seiner Südspitze. Boötes hat die Form eines Fugdrachens, seine südliche Spitze zeigt auf Spica, den hellsten Stern des Sternbildes Virgo. Durch Virgo zieht sich die Ekliptik und die Sonne steht hier im Spätsommer. Der Teil des Himmels kann also im Frühjahr am besten gesehen werden.



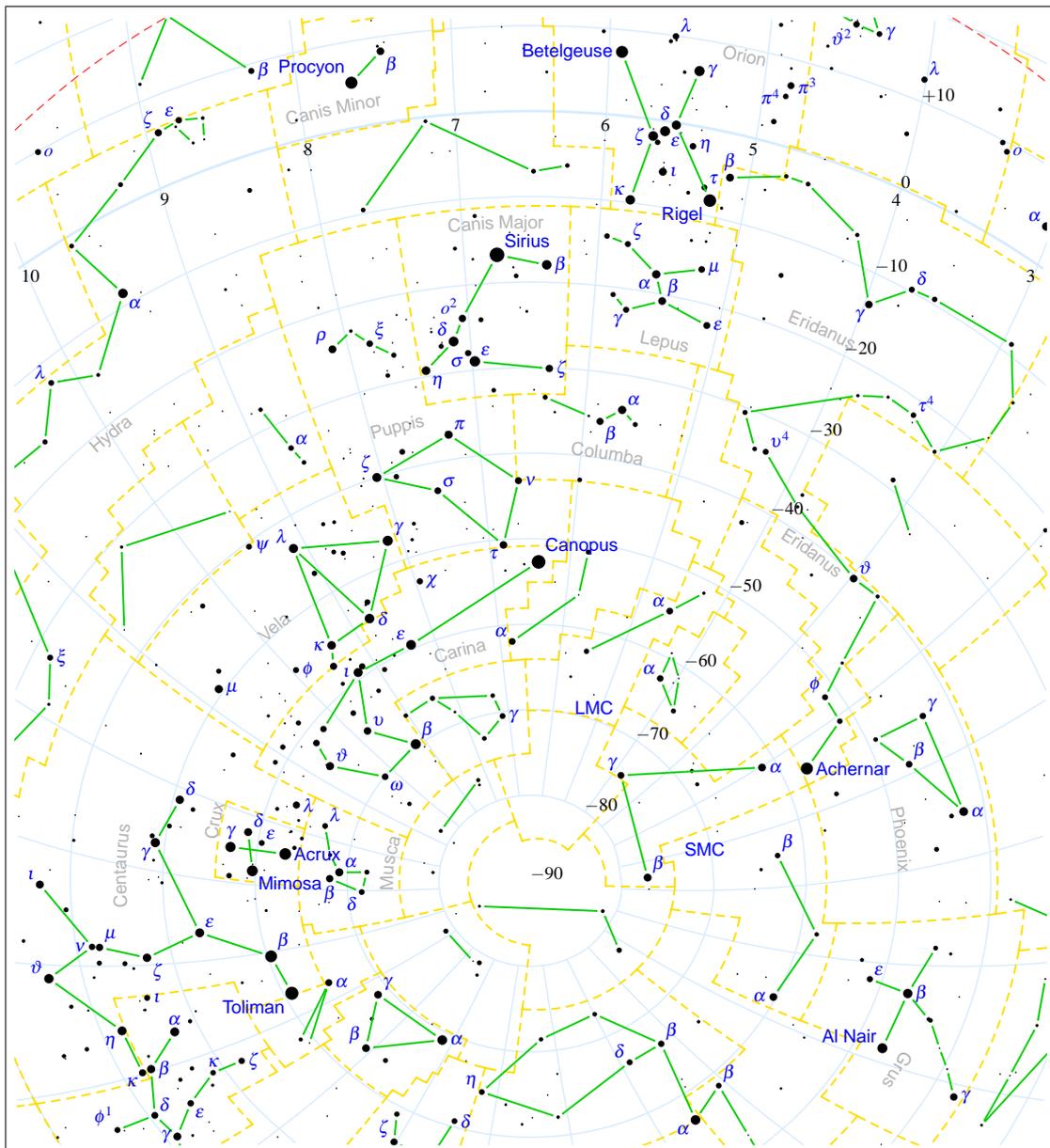
Wir hangeln uns nun immer an der Milchstraße entlang. Sie bietet die beste Orientierung. Zur Milchstraße kommen wir vom Großen Wagen über → Nordstern → Cassiopeia. Das Himmels-W liegt bereits in der Milchstraße. β-Cassiopeia, der nächste Stern (54 Lj) des “Himmels-W” liegt nur wenige ' vom Frühlingsmeridian $\alpha = 0$ entfernt. Cassiopeia ist zwar optisch nicht so hell, aber dafür eine starke Radioquelle (Überreste einer Supernova vor 300 Jahren) und wird gerne zur Eichung von Radarantennen benutzt. Von Cassiopeia geht's in zwei Richtungen zum Äquator herunter, hier der erste Weg von Cassiopeia → Perseus → Fuhrmann (Auriga) → Zwillinge (Gemini) und Stier (Taurus) → Orion. Es gibt hier mehrere helle Sterne: Mirfak und Algol im Sternbild Perseus, das man erreicht wenn der Verbindungsli-

nie $\gamma \rightarrow \delta$ Cassiopeia verlängert. Perseus wird etwa im Abstand von zwei Stunden gefolgt von Auriga mit dem Stern Capella (eigentlich ein Doppelstern), weitere zwei Stunden später kommen die Zwillinge (Gemini). Südlich von Auriga kommt wieder ein sehr prägnantes Sternbild: Orion. Zwischen Auriga und Orion liegt der Stier (Taurus) mit Aldebaran als hellstem Stern. Ebenfalls im Stier liegt der Sternhaufen der Plejaden (in der Karte mit der Ziffer 27 gekennzeichnet). Der nördliche der Gürtelsterne des Orion hat eine Deklination dicht bei null und kann bei der astronomischen Kompasskontrolle gute Dienste leisten: er geht immer sehr genau im Westen unter. Orion bietet auch zwei helle Navigationssterne: Betelgeuse im Norden und Rigel im Süden. Die Zwillinge Castor und Pollux sind genau wie Orion aufgrund der charakteristischen Form gut auszumachen. Ein weiterer sehr heller Stern ist Procyron im kleinen Hund südlich der Zwillinge. Er ist nur 11 Lichtjahre von uns entfernt. Im Stier und in den Zwillingen steht die Sonne von April bis Juni, diese Sternbilder prägen also zusammen mit Orion den Sternenhimmel im Spätherbst und Winter.



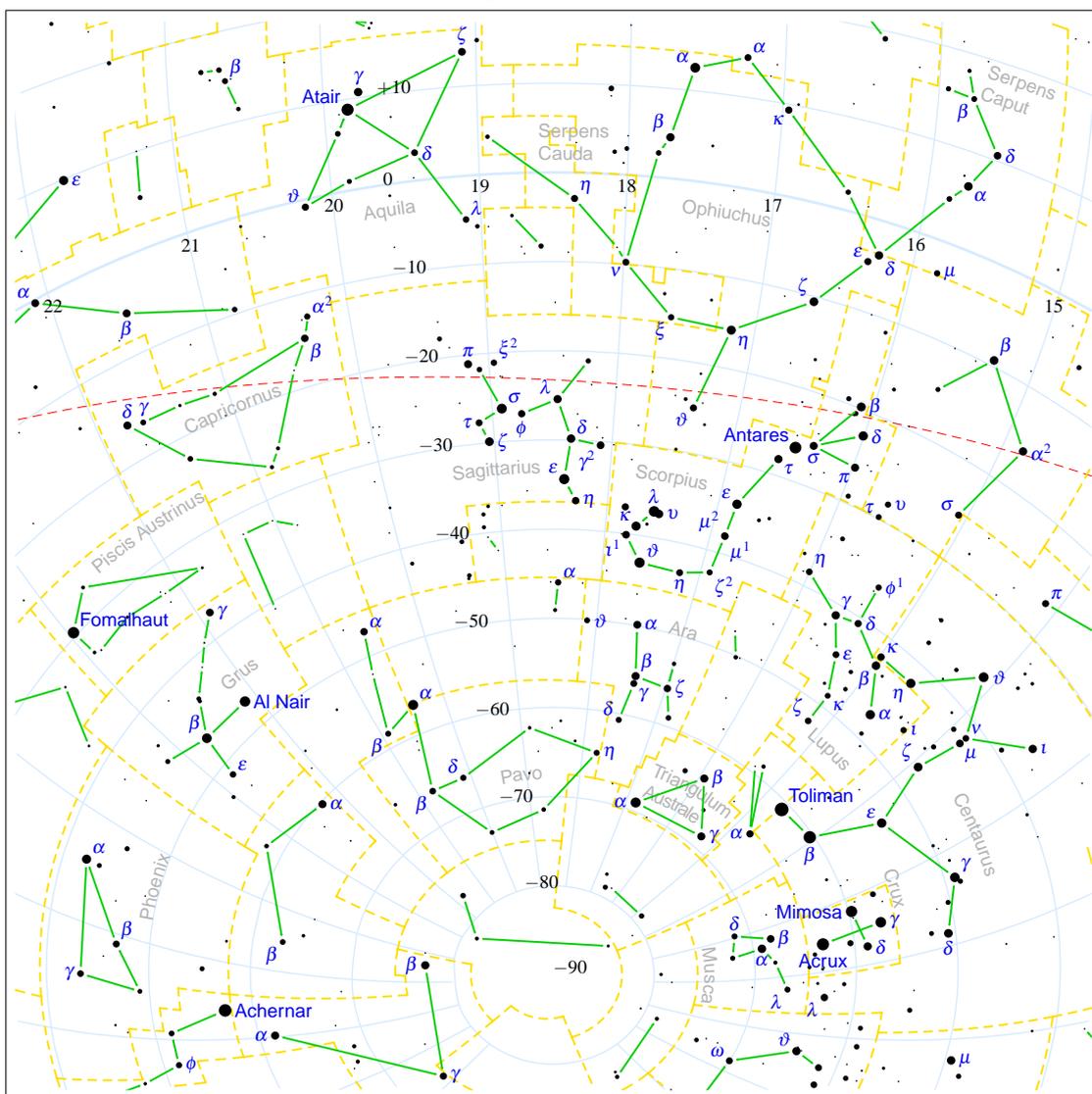
Von Cassiopeia aus in der anderen Richtung die Milchstraße entlang treffen wir nach einigem Abstand auf den Schwan (Cygnus) mit dem hellen Kopfstern Deneb. Unter seinem rechten Flügel liegt das Sternbild Leier (Lyra) mit dem zweithellsten Stern Vega. Folgen wir dem Schwanz des Schwans, erreichen

wir eine Flügelspitze des Sternbildes Adler (Aquila), wieder mit einem "hellen Kopf" dem Stern Atair. Außerhalb der Milchstraße liegen noch die hellen Sterne Markab (α -Pegasi) und Sirrah (an der Grenze zu Andromeda) des Sternbildes Pegasus. Das geflügelte Pferd steht auf dem Kopf (ϵ -Pegasi) und springt gerade über Cassiopeia hinweg. Der Andromeda-Nebel (NGC224), eine Spiralgalaxie, liegt 2.5 Millionen Lichtjahre entfernt etwa zwischen β -Andromeda und Cassiopeia. Aber zurück zu unserem Sonnensystem: Der Pol unserer Ekliptik befindet sich nahe dem δ -Stern des Sternbildes Drachen (Draco), das sich um die kleine Bärin windet. Die Rotationsachse der Erde, die z.Z auf den Nordstern zeigt, wird in 6000 Jahren auf das Sternbild Cepheus zeigen und in 13000 Jahren auf einen Ort etwas nördlich der Wega. Diese Hälfte der Milchstraße ist in Sommernächten gut zu sehen, da die Sonne sich zu dieser Jahreszeit auf der anderen Seite herumtreibt.



Nun zur Südhalbkugel: Die Milchstraße entlang geht's von Orion nach Süden vorbei am Großen Hund (Canis Major) mit dem hellsten Stern des Nachthimmels, Sirius. Er ist uns mit 8.6 Lichtjahren recht nahe. Wir finden Sirius, indem wir der Linie der Gürtelsterne des Orion in Südlicher Richtung und ansteigender

Rektazension folgen. Sirius liegt dann knapp südlich dieser Linie, das helle Doppelsternsystem Procyon deutlich nördlich. Auf dem Weg entlang der Milchstraße das nächste Sternbild ist Carina. der Name bedeutet Schiffskiel, das Sternbild Vela sollen die Segel sein und Puppis das erhöhte Acherdeck. So gesehen zieht Carina eine hell leuchtende Logge hinter sich her, den Stern Canopus. Auffallend ist das nächste Sternbild Crux oder das Südkreuz mit den hellen Sternen Acrux (α -Crucis, sind eigentlich drei Sterne) und Mimosa (auch Bcurx oder β -Crucis). Die Hauptachse des Südkreuzes zeigt z.Z. ziemlich genau auf den Südpol. Dieses Sternbild ziert mehrere Nationalflaggen, z.B. die von Australien, Neuseeland und Papua Neu-Guinea. Weitere helle Objekte außerhalb der Milchstraße sind die Magellanschen Wolken (LMC und SMC für Large und Small Magellanic Cloud), zwei Nachbargalaxien. Zumindest beim helleren Nachbar LMC geht's hoch her: 1987 wurde dort eine Supernova beobachtet. Interessant (und hell) ist auch Achernar am Südpole vom Sternbild Eridanus: er rotiert so schnell, dass er eine stattliche Abplattung besitzen soll, was man ihm aus der Entfernung natürlich nicht ansieht.



Die andere Hälfte der Südhalbkugel: die Milchstraße entlang vom Südkreuz vom Adler. Nach dem Südkreuz (Crux) kommt als nächstes Centaurus mit dem hellen α -Stern Toliman (auch Rigil Centaurus). Er besteht eigentlich aus drei Einzelsternen, die nur 4.4 Lichtjahre entfernt sind. Noch dichter ist Proxima Centaurus, ein brauner Zwergstern dicht bei α Centaurus mit einer Entfernung von 4.24 Lichtjahren, mit bloßen Augen aber nicht sichtbar. Es wird spekuliert, dass der Hellste der drei α -Sterne ein Planetensystem

mit Leben ermöglichenden Bedingungen besitzen könnte. Ein weiteres eindrucksvolles Sternbild auf dem Weg zum Adler ist der Skorpion (Scorpius) mit dem α -Stern Antares, knapp südlich der Ekliptik und am besten im Sommer sichtbar. Zwischen dem Schwanz des Skorpions im Süden und dem Adler liegt noch das Sternbild Schütze (Sagittarius). Hier liegt das Zentrum der Milchstraße in einer Entfernung von etwa 25000 Lichtjahren. Es ist durch Nebel verhüllt und kann daher nur durch seine Radiostrahlung und im Infraroten Licht geortet werden. Aus der Sternbewegung in der Nähe des Zentrums schließt man auf das Vorhandensein eines schwarzen Lochs mit einigen Millionen Sonnenmassen. Wir selbst umkreisen dieses Zentrum auch, ein galaktisches Jahr dauert für uns schlappe 230 Millionen Jahre.

G Präzessionskorrektur

Durch die Bewegung der Equatorebene und der Ekliptik gegeneinander wandert der Frühlingspunkt, der ja die eine Richtung der Schnittgerade der beiden Ebenen bezeichnet. Dies ist schmerzhaft insofern, als der Frühlingspunkt die Referenzrichtung für das ekliptikale und das equatoriale Koordinatensystem definiert

Die folgenden Formeln von [5] ermöglichen eine “low precision” Version der Umrechnung der Koordinaten des equatorialen Systems auf den Äquator und Ekliptik einer Zeit T_1 , wenn sich die Ausgangskordinaten auf die Zeit T_0 beziehen. Ähnlich wie in (4.2) sind $T_{0,1}$ jeweils die Zeit seit dem 1. Jan 2000, 12^h0, jetzt aber in Jahren ausgedrückt

$$T = \frac{2555.5 + d}{365.25} \quad (\text{G.1})$$

wobei d wieder die Julianischer Tage seit dem 31. Dezember 2006 sind (angefangen mit $d=1$ für den 1. Januar 2007). Zur angestrebten Genauigkeit reichen uns die Tage d , Stunden und Minuten können unberücksichtigt bleiben.

Sind α_0 und δ_0 die Rektazension und Deklination bezogen auf den mittleren Äquator und den Frühlingspunkt zur Zeit T_0 , so sind die Koordinaten

$$\alpha_1 = \alpha_0 + (3^s + 1^s \sin(\alpha_0) \tan(\delta_0)) (T_1 - T_0) \quad (\text{G.2})$$

$$\delta_1 = \delta_0 + 20'' \cos(\alpha_0) (T_1 - T_0) \quad (\text{G.3})$$

jetzt bezogen auf den mittleren Äquator und den Frühlingspunkt zur Zeit T_1 . Die Rektazension α ist hier wie üblich in Zeiteinheiten angegeben, die Korrektur in Sekunden. Die Änderung der Deklination ist dagegen in Bogensekunden angegeben. Die Näherungsformel funktioniert nicht mehr gut, wenn $\delta_0 \rightarrow \pi/2$ da dann die Tangensfunktion sehr groß wird. Ein Trost: je näher unser Stern am Pol liegt, desto weniger genau müssen wir die Rektazension kennen, am Pol selbst ist sie gar nicht mehr definiert.

H Berechnungsformulare

Endposition nach Mittelbreitenverfahren

<p>Strecke s <input style="width: 100px;" type="text"/> sm</p> <p>Startbreite φ_0 ° !</p> <p>$+\frac{1}{2}\Delta\varphi = \frac{s}{120} \cos \text{KüG} =$ <input style="width: 100px;" type="text"/> !</p> <p>Mittelbreite $\bar{\varphi}$ ° !</p> <p>$+\frac{1}{2}\Delta\varphi$!</p> <p>Endbreite φ_1 <input style="width: 100px;" type="text"/> !</p>	<p>Kurs KüG <input style="width: 100px;" type="text"/> °</p> <p>Startlänge λ_0 ° !</p> <p>$+\Delta\lambda = \frac{\Delta\varphi}{\cos \bar{\varphi}} \tan \text{KüG} =$ <input style="width: 100px;" type="text"/> !</p> <p>Endlänge λ_1 <input style="width: 100px;" type="text"/> !</p>
---	--

Strecke und Kurs nach Mittelbreitenverfahren

<p>Endbreite φ_1 ° !</p> <p>– Startbreite φ_0 ° !</p> <p>$\Delta\varphi$!</p> <p>Startbreite φ_0 ° !</p> <p>$+\frac{1}{2}\Delta\varphi$!</p> <p>Mittelbreite $\bar{\varphi}$ <input style="width: 100px;" type="text"/> !</p>	<p>Endlänge λ_1 ° !</p> <p>– Startlänge λ_0 ° !</p> <p>$\Delta\lambda$!</p> <p>KüG = $\text{atan} \frac{\Delta\lambda \cos \bar{\varphi}}{\Delta\varphi} =$ <input style="width: 100px;" type="text"/> °</p> <p>Strecke $s = \frac{60\Delta\varphi}{\cos \text{KüG}} =$ <input style="width: 100px;" type="text"/> sm</p> <p>$= 60\Delta\varphi \sqrt{1 + (\Delta\lambda \cos \bar{\varphi} / \Delta\varphi)^2}$</p>
---	--

Endposition nach dem Verfahren der Gestreckten Breite

Strecke s sm

Kurs KüG °

Startbreite φ_0 ° !
 $+\Delta\varphi = \frac{s}{60} \cos \text{KüG} =$!
 Endbreite φ_1 ° !

Startlänge λ_0 ° !
 $+\Delta\lambda = \Delta\Phi \tan \text{KüG} =$!
 Endlänge λ_1 ° !

$$t_1 = \tan(\varphi_1/2 + 45^\circ) =$$

$$t_0 = \tan(\varphi_0/2 + 45^\circ) =$$

$$\Delta\Phi = \frac{84600}{\pi} \ln \frac{t_1}{t_0} = \text{}$$

Strecke und Kurs nach dem Verfahren der Gestreckten Breite

Endbreite φ_1 ° !
 – Startbreite φ_0 ° !

 $\Delta\varphi$!

Endlänge λ_1 ° !
 – Startlänge λ_0 ° !

 $\Delta\lambda$!

$$t_1 = \tan(\varphi_1/2 + 45^\circ) =$$

$$t_0 = \tan(\varphi_0/2 + 45^\circ) =$$

$$\Delta\Phi = \frac{84600}{\pi} \ln \frac{t_1}{t_0} \text{ !}$$

$$\text{KüG} = \text{atan} \frac{\Delta\lambda}{\Delta\Phi} = \text{ °}$$

$$\text{Strecke } s = \frac{60\Delta\varphi}{\cos \text{KüG}} \text{ sm}$$

$$= 60\Delta\varphi \sqrt{1 + (\Delta\lambda/\Delta\Phi)^2}$$

Mittagbreite und korrespondierende Höhen (ohne Versegelung)

Datum

Bordzeit

Zeitzone UT+

gekoppelte Breite φ_k ° ' !
(N/S → ±) = ° ' !

gekoppelte Länge λ_k ° ' !
(E/W → ±) = ° ' !

Zeit des Transits

Transit Greenwich T_{Gr} h m s → h m s
 $-\lambda_k/15^\circ$

vorrausberechnet T_{Trans}

Deklination $\delta(T_{Trans})$ Unt(δ)

Aufsteigende Sonne

Augeshöhe m

Ablesung  h m 00 s

+ Stoppuhr s

Ablesung  ° ' !

+ Gangkorr. s

+12^h falls Nachm. h

Zeit T_{\uparrow} UT

Kulminierende Sonne

Augeshöhe m

Ablesung  h m 00 s

+ Stoppuhr s

Ablesung  ° ' !

+ Gangkorr. s

± Indexkorr. ' !

+12^h falls Nachm. h

Kimmabstand ° ' !

~ Transitzeit UT

+ HauptBesch. ' !

+ ZusatzBesch. ' !

geozentr. Höhe H ° ' !

Länge $90^\circ - H =$

Absteigende Sonne

Augeshöhe m

Ablesung  h m 00 s

+ Stoppuhr s

Ablesung  ° ' !

+ Gangkorr. s

+12^h falls Nachm. h

Zeit T_{\downarrow} UT

GHA der Sonne um beobachteter T_{Trans}

T_{\downarrow} UT	h	m	s	Stdwinkel GHA(h00)	°	'	!
$+T_{\uparrow}$ UT	h	m	s	+ Zuw nach Schalttafel	°	'	!
$+(\tan \delta - \tan \varphi_k) \frac{1^m \text{ Unt}}{3'93/1^h}$		m	s	Unt <input type="text"/>		'	!
$2T_{Trans} =$	h	m	s	$\rightarrow +Vb$		'	!
beobachtet T_{Trans}	h	m	s	$-Länge = -\lambda = GHA =$	°	'	!

Standlinie für Sonne, Planeten, Mond nach St.Hilaire

Datum <input style="width: 100%;" type="text"/>	Bordzeit <input style="width: 100%;" type="text"/>
Objekt <input style="width: 100%;" type="text"/>	Zeitzone UT+ <input style="width: 100%;" type="text"/>
Rechenbreite φ_r ° ' ! (N/S → ±) = <input style="width: 100%;" type="text"/>	Rechenlänge λ_r ° ' ! (EW → ±) <input style="width: 100%;" type="text"/>

Gestirnhöhe (Sonne, Mond, Planeten), Reduktion nach BSH

Augeshöhe <input style="width: 100%;" type="text"/> m	HP <input style="width: 100%;" type="text"/> ' !	Ablesung h m 00 s	
Ablesung ° ' !		+ Stoppuhr s	
± Indexkorr. _____ ° ' !		+ Gangkorr. s	
Kimmabstand _____ ° ' !		Chronometerstand _____ h m s	
+ HauptBesch. _____ ° ' !		+12 ^h falls Nachm. h	
+ ZusatzBesch. _____ ° ' !		Zeit UT <input style="width: 100%;" type="text"/>	
- MondØ falls Oberr. _____ ° ' !			
geozentr. Höhe H _____ ° ' !	$\frac{\text{arcmin}}{60} \curvearrowright$		
= <input style="width: 100%;" type="text"/>			

Gestirnsposition (Sonne, Planeten, Mond) um $h^h k^m$ UT nach BSH

Deklination δ ($h^h 00$) ° ' !	Stdnwinkel GHA ($h^h 00$) ° ' !
Unt <input style="width: 100%;" type="text"/> ' ! → +Vb _____ ° ' !	Zuw nach Schalttafel ° ' !
Deklination δ _____ ° ' !	Unt <input style="width: 100%;" type="text"/> ' ! → +Vb _____ ° ' !
= <input style="width: 100%;" type="text"/>	GHA _____ ° ' !
	+Rechenlänge λ_r _____ ° ' !
	LHA _r _____ ° ' !
	= <input style="width: 100%;" type="text"/> $\frac{\text{arcmin}}{60} \curvearrowright$

Intercept und Azimut

geozentr. Höhe H ° - Rechenhöhe $H_r = -\text{asin}(\sin(\delta) \sin(\varphi_r) + \cos(\text{LHA}_r) \cos(\delta) \cos(\varphi_r)) =$ ° Intercept ΔH _____ ° ' ! $\times 60 \curvearrowright$ <input style="width: 100%;" type="text"/> ' !	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" style="text-align: center;">Speicher</th></tr> <tr><td style="width: 50%; text-align: center;">δ</td><td style="width: 50%;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">φ_r</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">LHA_r</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">H_r</td><td></td></tr> </table>	Speicher		δ		φ_r		LHA _r		H_r	
Speicher											
δ											
φ_r											
LHA _r											
H_r											

Azimut* $A = -\text{asin}\left(\frac{\cos(\delta)}{\cos(H_r)} \sin(\text{LHA}_r)\right) =$

(* Quadrant des Azimut entspricht (LHA_r, $\delta - \varphi_r$):)

Standlinie für Sterne nach St.Hilaire

Datum <input style="width: 100%;" type="text"/>	Bordzeit <input style="width: 100%;" type="text"/>
Objekt <input style="width: 100%;" type="text"/>	Zeitzone UT+ <input style="width: 100%;" type="text"/>
Rechenbreite φ_r ° ! (N/S → ±) = <input style="width: 100%;" type="text"/>	Rechenlänge λ_r ° ! (EW → ±) <input style="width: 100%;" type="text"/>

Gestirnhöhe (Stern), Reduktion nach BSH

Augeshöhe <input style="width: 100%;" type="text"/> m	Ablesung h m 00 s
Ablesung ° !	+ Stoppuhr s
± Indexkorr. <input style="width: 100%;" type="text"/>	+ Gangkorr. s
Kimmabstand ° !	Chronometerstand <input style="width: 100%;" type="text"/> h m s
+ HauptBesch. <input style="width: 100%;" type="text"/>	+12 ^h falls Nachm. h
geozentr. Höhe H ° !	Zeit UT <input style="width: 100%;" type="text"/> h m s
= <input style="width: 100%;" type="text"/>	

$\frac{\text{arcmin}}{60} \curvearrowright$

Gestirnsposition (Stern) um $h^h k^m$ UT nach BSH

Deklination δ ° !	Frühlingspkt GHA($h^h 00$) ° !
= <input style="width: 100%;" type="text"/>	Zuw nach Schalttafel ° !
Sternwinkel SHA <input style="width: 100%;" type="text"/> ° !	Unt <input style="width: 100%;" type="text"/> ! → +Vb <input style="width: 100%;" type="text"/>
	Frühlingspkt GHA ° !
	+ Sternwinkel SHA ° !
	+ Rechenlänge λ_r ° !
	LHA _r ° !
	= <input style="width: 100%;" type="text"/>

$\frac{\text{arcmin}}{60} \curvearrowright$

Intercept und Azimut

geozentr. Höhe H °	
- Rechenhöhe $H_r = -\text{asin}(\sin(\delta) \sin(\varphi_r) + \cos(\text{LHA}_r) \cos(\delta) \cos(\varphi_r)) =$	
Intercept ΔH °	<input style="width: 100%;" type="text"/>
	$\times 60 \curvearrowright$

Speicher	
δ	
φ_r	
LHA _r	
H_r	

Azimut* $A = -\text{asin}\left(\frac{\cos(\delta)}{\cos(H_r)} \sin(\text{LHA}_r)\right) =$

(* Quadrant des Azimut entsprechend (LHA_r, $\delta - \varphi_r$):)

Kompasskontrolle (Sonne, Planeten, Mond)

Datum	<input type="text"/>	Bordzeit	<input type="text"/>
Objekt	<input type="text"/>	Zeitzone	UT+
Breite φ	<input type="text"/> ° <input type="text"/> ′	Länge λ	<input type="text"/> ° <input type="text"/> ′
(N/S → ±) =	<input type="text"/> °	(EW → ±)	

Gestirnshöhe (Sonne, Mond, Planeten), Reduktion nach BSH

Seitenpeilung	°	Ablesung 	h	m	00 s
+ Kompasskurs	°	+ Stoppuhr			s
Kompasspeilung	<input type="text"/> °	+ Gangkorr			s
		Chronometerstand	h	m	s
		+12 ^h falls Nachm.	h		
		Messzeit UT	h	m	s

Gestirnsposition (Sonne, Planeten, Mond) nach BSH

Deklination δ (^h 00)	°	′	Stdnwinkel GHA(^h 00)	°	′
Unt <input type="text"/> ′ → +Vb		′	Zuw nach Schalttafel	°	′
Deklination δ	°	′	Unt <input type="text"/> ′ → +Vb		′
=	<input type="text"/> °		GHA	°	′
			+ Länge λ	°	′
			LHA	°	′
			=	<input type="text"/> °	<input type="text"/> ′ $\frac{\text{arcmin}}{60}$ ↷

Azimutkontrolle

Gestirnsazimut*				
$A = -\text{atan}\left(\frac{\sin \text{LHA}}{\cos \varphi \tan \delta - \sin \varphi \cos \text{LHA}}\right) =$	°			
– Kompasspeilung	°			
– Missweisung	°			
Magn. Ablenkung	°			

Speicher	
φ	
δ	
LHA	

(* Quadrant des Azimut entsprechen (LHA, $\delta - \varphi$)

Chronometerkontrolle

Datum <input style="width: 100%;" type="text"/>	Bordzeit <input style="width: 100%;" type="text"/>
Objekt <input style="width: 100%;" type="text"/>	Zeitzone UT+
Breite φ ° ' ! (N/S → ±) = <input style="width: 100%;" type="text"/>	Länge λ ° ' ! (EW → ±)

Gestirnhöhe, Reduktion nach BSH

Augeshöhe <input style="width: 100%;" type="text"/> m	HP <input style="width: 100%;" type="text"/> ' !	Ablesung h m 00 s			
Ablesung	° ' !	+ Stoppuhr			s
± Indekorr.	° ' !	Chronometerstand	h m s		
Kimmabstand	° ' !	+12 ^h falls Nachm.	h		
+ HauptBesch.	° ' !	Chronometerzeit UT	<input style="width: 100%;" type="text"/> h m s		
+ ZusatzBesch.	° ' !				
- MondØ falls Oberr.	° ' !				
geozentr. Höhe H	° ' !	$\frac{\text{arcmin}}{60} \curvearrowright$			
= <input style="width: 100%;" type="text"/>	° ' !				

Gestirnsposition (Frühlingspkt falls Stern) zur Chronometerzeit nach BSH

Deklination δ (h00) ° ' !	Stdnwinkel GHA(h00) ° ' !
Unt <input style="width: 100%;" type="text"/> ' ! → +Vb	Zuw nach Schalttafel ° ' !
Deklination δ	Unt <input style="width: 100%;" type="text"/> ' ! → +Vb
= <input style="width: 100%;" type="text"/>	GHA ° ' !
	falls Stern +SHA ° ' !
	+ Länge λ ° ' !
	LHA(ChronZeit) ° ' !
	= <input style="width: 100%;" type="text"/>
	$\frac{\text{arcmin}}{60} \curvearrowright$

Beobachtete Länge des Gestirns

beobachteter LHA			<table border="1" style="margin: auto;"><tr><th colspan="2">Speicher</th></tr><tr><td style="width: 50%;">φ</td><td style="width: 50%;"></td></tr><tr><td>H</td><td></td></tr><tr><td>δ</td><td></td></tr></table>	Speicher		φ		H		δ	
Speicher											
φ											
H											
δ											
$= \arccos\left(\frac{\sin H - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}\right) =$	°										
-LHA(ChronZeit)	°										
$\Delta\text{LHA in Grad}$	°	$\times 60 \curvearrowright$									
$\Delta\text{LHA in Bogenminuten}$	'	→ /	$\left\{ \begin{array}{l} 900'0 \quad \text{⊙} \\ 902'5 \quad \text{☆} \\ 900'0 + \text{Unt} \quad \text{⊗} \\ 859'1 + \text{Unt} \quad \text{☽} \end{array} \right. \curvearrowright$								
Chronometergang	h	$\times 3600 \curvearrowright$									
Chronometergang	<input style="width: 100%;" type="text"/>	s									

Allgemeine Kompasskontrolle

Objekt Datum
 Bordzeit
 Zeitzone UT+

Breite φ östl. Länge λ

Greenwich Stundenwinkel $GHA_0 = \text{acos} \frac{\tan \delta}{\tan \varphi} - \lambda =$ °
 Deklination δ zur Zeit $GHA_0 =$ °
 Azimut beim Untergang $A_0 = 270^\circ + \text{asin} \frac{\sin(\delta)}{\cos(\varphi)} =$ °
 Bahnneigung beim Untergang $\Theta = \text{atan} \frac{\sin(A_0)}{\tan(\varphi)} =$ °

Gestirnshöhe

abgelesene Höhe	Chronometerabl.	h	m	000
± Indexbesch. _____	+ Stoppuhrsek/60		m	
Höhe ü. Kimm _____	+ Gangkorr./60		m	
– Kimmtiefe _____	Chronometer	h	m	
– Refraktkorr. _____	+12 ^h falls Nachm.			
± Gestirnsrad. _____	Höhenmess. UT	h	m	
geozentr. Höhe H <input style="width: 100px;" type="text"/> ' !	Zeitdiff bis $\frac{1^m}{15'} \frac{H}{\sin(\Theta)} =$		m	
	Untergangszeit t_0	h	m	

Gestirnsazimut

Mg Peilung	Chronometerabl.	h	m	000
+ Ablenk. _____	+ Stoppuhr		m	
+ Missw. _____	+ Gangkorr.		m	
Peilung rWP <input style="width: 100px;" type="text"/> °	Chronometer	h	m	
	+12 ^h falls Nachm.	h		
	Peilung UT	h	m	
	–Untergangszeit t_0	h	m	
	Zeitdiff zum Untergang Δt	h	m	

Azimut A_0 beim Untergang
 Korrektur $\pm 15' \frac{\Delta t}{1^m} \cos \Theta =$ _____
 wahre Peilung _____
 – gemessenen Peilung _____
 Kompasskorrektur °

Allgemeine Chronometerkontrolle durch Sternhöhe

Stern	<input type="text"/>	Datum	<input type="text"/>
Rektazension α	<input type="text"/>	Bordzeit	<input type="text"/>
Deklination δ	<input type="text"/>	Zeitzone	UT+
Breite φ	<input type="text"/>	östl. Länge λ	<input type="text"/>

Gestirnhöhe

abgelesene Höhe	Chronometerabl.			
\pm Indexbesch. _____	+ Stoppuhr _____			
Höhe ü. Kimm _____	Chronometer _____			
- Kimmtiefe _____	+12 ^h falls Nachm. _____			
- Refraktkorr. _____	Chron.Zeit UT <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="width: 20px; text-align: center;">h</td><td style="width: 20px; text-align: center;">m</td><td style="width: 20px; text-align: center;">s</td></tr></table>	h	m	s
h	m	s		
geozentr. Höhe H <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="width: 40px; text-align: center;">°</td><td style="width: 40px; text-align: center;">'</td><td style="width: 40px; text-align: center;">"</td></tr></table>	°	'	"	
°	'	"		

GST zur Chronometerzeit $h^h m^m s^s$

Tag des Jahres 2007	60 × h			
+2555.5	+ m _____			
/365.25	× 60 =			
Julianische Jahre	+ s			
von J2000 bis 0 UT	Tagessek seit 0 UT <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="width: 40px; text-align: center;">h</td><td style="width: 40px; text-align: center;">m</td><td style="width: 40px; text-align: center;">s</td></tr></table>	h	m	s
h	m	s		
(auf 10^{-5}) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="width: 40px; text-align: center;">.</td><td style="width: 40px; text-align: center;">"</td><td style="width: 40px; text-align: center;">"</td></tr></table>	.	"	"	
.	"	"		

GST 1. Jan 2000 12 UT	24110 ^s .6	
Jul. Jahre × 86401 ^s .8	.	
GST Messdatum 0 UT	.	
Tagessek × 1.002738	.	
GST zur ChronZeit	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="width: 40px; text-align: center;">s</td></tr></table> (modulo 86400)	s
s		

GST zur gemessenen Gestirnhöhe H

LHA = $\arccos\left(\frac{\sin(H) - \sin(\delta) \sin(\varphi)}{\cos(\delta) \cos(\varphi)}\right) =$	°	
+ Rektazension α	°	
- östl. Länge λ	°	
GST zur Sternhöhe	° × 240 = <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="width: 40px; text-align: center;">s</td></tr></table>	s
s		
	- GST zur ChronZeit <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="width: 40px; text-align: center;">s</td></tr></table>	s
s		
	Gangkorrektur <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="width: 40px; text-align: center;">s</td></tr></table>	s
s		

(Gangkorr. in Sternsek., ggf. durch 1.002738 dividieren)

Allgemeine Chronometerkontrolle durch Sonnen/Planetenhöhe

Objekt	<input type="text"/>	Datum	<input type="text"/>
		Bordzeit	<input type="text"/>
		Zeitzone	UT+
Breite φ	<input type="text"/>	östl. Länge λ	<input type="text"/>

Gestirnhöhe

abgelesene Höhe	°	m	Chronometerabl.	h	m	00 ^s
± Indexbesch.	<input type="text"/>		+ Stoppuhr	<input type="text"/>		
Höhe ü. Kimm	<input type="text"/>		Chronometer	h	m	s
- Kimmtiefe	<input type="text"/>		+12 ^h falls Nachm.	<input type="text"/>		
- Refraktkorr.	<input type="text"/>		Chron.Zeit UT	h	m	s
± Sonnenrad.	<input type="text"/>		=	<input type="text"/>		
geozentr. Höhe H	°	m				
=	<input type="text"/>					

GHA zur gemessenen Gestirnhöhe H

Deklination δ zur Messzeit

$$\text{LHA} = \arccos\left(\frac{\sin(H) - \sin(\delta) \sin(\varphi)}{\cos(\delta) \cos(\varphi)}\right) = \text{°}$$

- östl. Länge λ

beobachteter GHA × 15 =

GHA aus Almanach zur Chron.Zeit $h^h m^m n$

GHA um h^h $\frac{d\text{GHA}}{dt}$ pro Std.

GHA in DezimalStd

- beobachteter GHA

ΔGHA × $\frac{d\text{GHA}}{dt}$

- Chron.Minuten $m^m n$

Gangkorr in Min × 60 =

Gangkorr in Sek

(Falls Gangkorr groß, beobachtetes GHA mit neuer Deklination zur Zeit ChronZeit+Gangkorr erneut berechnen und Rechnung mit neuem GHA wiederholen)

TBD:

Vers 0.9
Formelsammlung für die Prüfung mit Arbeitsheets
Arbeitsheets überarbeiten

Vers 1.0
Kurzanleitung Kap 10 überarbeiten
Kap 8.4 Höhenmessung mit Vektoren: zuende rechnen